ELEMENTE DER MATHEMATIK

BADEN-WÜRTTEMBERG
Vektoren – Geraden im Raum
Lösungen

Herausgegeben von

Heinz Griesel

Helmut Postel

Friedrich Suhr

Schroedel

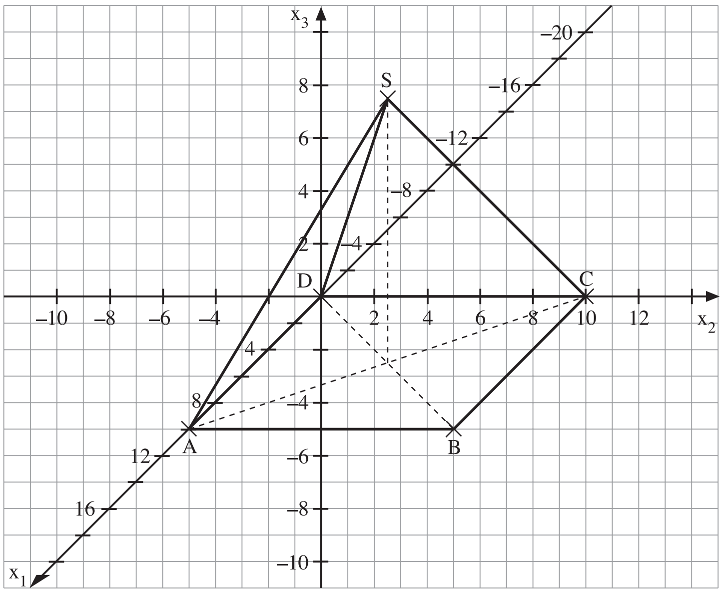
Vektoren – Geraden im Raum

1. Kartesisches Koordinatensystem im Raum

3 Man benötigt Angaben über Reihe, Platz, Etage
Der Container ist in Reihe 14, Platz 4, Etage 4.
Veränderung um 2 Reihen nach rechts, einen Platz nach vorne, eine Etage höher.

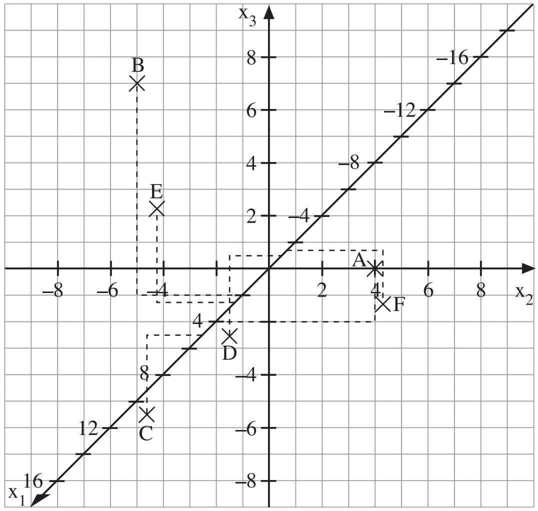
6 **2.** -

3.



A(10 | 0 | 0); B(10 | 10 | 0); C(0 | 10 | 0); D(0 | 0 | 0); S(5 | 5 | 8)

7 **4.**



5. Der Punkt P kann zum Beispiel die Koordinaten P(5 | 5 | 5) haben, es sind noch unendlich viele andere Möglichkeiten denkbar, z. B. P(–5 | 0 | 0) oder P(2 | 3,5 | 3,5).

6. **a)** In der x_2-x_3-Ebene [in einer Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene im Abstand 2; in einer Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene im Abstand –3].

b) In der x_1-x_3-Ebene [in einer Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene im Abstand –2; in einer Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene im Abstand 4].

c) In der x_1-x_2-Ebene [in einer Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene im Abstand 4; in einer Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene im Abstand –5].

d) Auf der x_3-Achse [auf einer Geraden parallel zur x_3-Achse im Abstand 0,5; auf einer Geraden parallel zur x_3-Achse im Abstand –1].

e) Auf der x_2-Achse [auf einer Geraden parallel zur x_2-Achse im Abstand 3; auf einer Geraden parallel zur x_2-Achse im Abstand –4].

f) Auf der x_1-Achse [auf einer Geraden parallel zur x_1-Achse im Abstand –5; auf einer Geraden parallel zur x_1-Achse im Abstand 1,5].

7. Man geht von P um 3 Einheiten nach unten zum Punkt P'(2 | 2,5 | 0).
P hat die Koordinaten P(2 | 2,5 | 3).

8. **a)** A(20 | –12 | 0), B(20 | 0 | 0), C(0 | 0 | 0), D(0 | 30 | 0),
E(–12 | 30 | 0), F(20 | –12 | 8), G(20 | 0 | 8), H(0 | 0 | 8),
I(0 | 30 | 8), J(–12 | 30 | 8), K(–12 | –12 | 8)

7

8. b) x_1-x_2-Ebene : 3. Koordinate 0: A, B, C, D, E
x_2-x_3-Ebene : 1. Koordinate 0: C, D, H, I
x_1-x_3-Ebene : 2. Koordinate 0: B, C, G, H

c) 1. Koordinate um 20 verringern, 3. Koordinate um 8 verringern, dann alle Vorzeichen ändern.
A(0 | 12 | 8), B(0 | 0 | 8), C(20 | 0 | 8), D(20 | –30 | 8), E(32 | –30 | 8), F(0 | 12 | 0), G(0 | 0 | 0), H(20 | 8 | 0), I(20 | –30 | 0), K(32 | 12 | 0)
x_1-x_2-Ebene : F, G, H, I, K
[x_2-x_3-Ebene : A, B, F, G; x_1-x_3-Ebene : B, C, G, H]

9. a) (1) P'(1 | 2 | –3) (3) P'(1 | –2 | 3) (5) P'(–1 | –2 | 3)
(2) P'(–1 | 2 | 3) (4) P'(–1 | 2 | –3) (6) P'(–1 | –2 | –3)
b) (1) P'(–1 | 2 | 3) (3) P'(–1 | –2 | –3) (5) P'(–1 | 0 | 3)
(2) P'(1 | 2 | –3) (4) P'(1 | 2 | 3) (6) P'(1 | –2 | 3)
c) (1) P'(1 | 0 | 3) (3) P'(1 | 0 | –3) (5) P'(–1 | 0 | –3)
(2) P'(–1 | 0 | –3) (4) P'(–1 | 0 | –3) (6) P'(–1 | 0 | 3)
d) (1) P'(4 | –1 | 0) (3) P'(4 | 1 | 0) (5) P'(4 | –1 | 0)
(2) P'(–4 | –1 | 0) (4) P'(–4 | –1 | 0) (6) P'(–4 | 1 | 0)

2. Vektoren – Verschiebungen

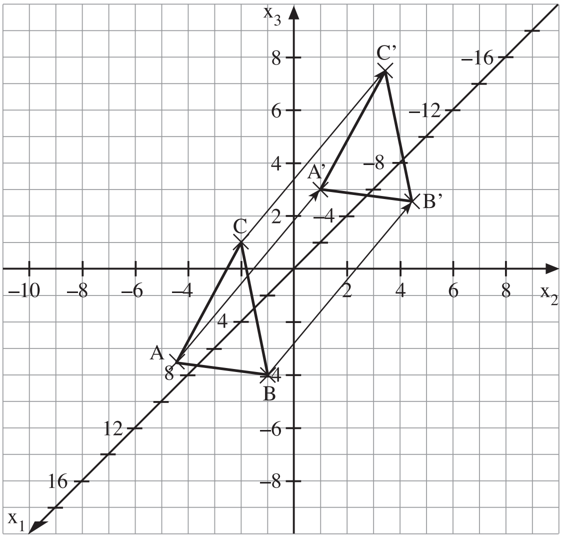
9

2. a) Durch die Verschiebung mit dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) Die Verschiebung $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ wird durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$ rückgängig gemacht.

9

3.



A'(5 – 9 | –2 + 1 | –1 + 2) = A'(–4 | –1 | 1)
B'(4 – 9 | 1 + 1 | –2 + 2) = B'(–5 | 2 | 0)
C'(–2 – 9 | –3 + 1 | 0 + 2) = C'(–11 | –2 | 2)

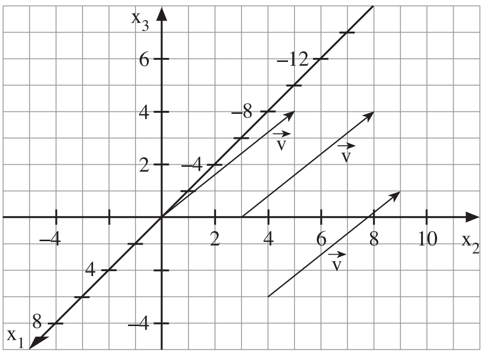
4. **a)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6{,}1 \\ 8 \\ -4{,}2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. **a)** A'(11 | 5 | 3) **c)** A'(6 | 4 | –3)
b) A'(10,6 | 5,4 | –10,9) **d)** A'(0 | 0 |0)

6. **a)** A(0 | –3 | –10) **b)** A(0 | 2 | –1) **c)** A(0 | –1 | 6) **d)** A(3 | –2 | 5)

10

7.



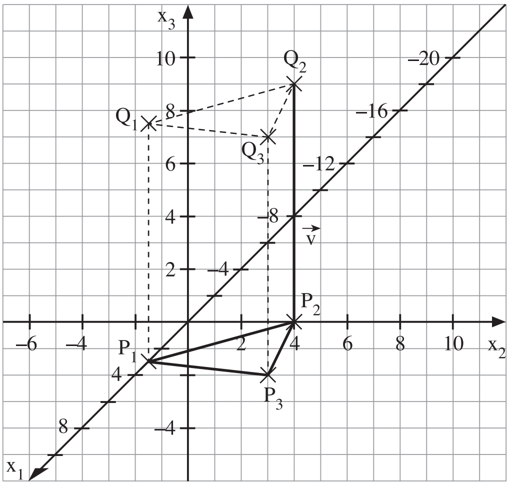
10

8. Der Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. a) Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ hat die erste Koordinate 4, die zweite −4 und die dritte 4.

b) Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zeigt von P auf Q und hat die drei Koordinaten 0,5; −1,3; −1,9.

10. a) $Q_1(3\,|\,0\,|\,9)$, $Q_3(4\,|\,5\,|\,9)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_2Q_2}$



b) $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1Q_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$Q_1'(-3\,|\,8\,|\,9)$, $Q_3'(1\,|\,9\,|\,9)$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{P_3Q_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

11. a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{MC}$

$[\vec{b} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}]$

$[\vec{d} = \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}]$

b) Dreht man einen Würfel so, dass z. B. die linke obere vordere Ecke vor der rechten unteren hinteren Ecke liegt (eine Raumdiagonale verschwindet), so gilt: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{ED}$.

10

12. **a)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{ED}$ **c)** $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DJ}$ **e)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IL}$

b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HG}$ **d)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JL}$

13. **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}$

14. Druckfehler in der 1. Auflage: A(6 | 1 | 4)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Also: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

15. **a)** $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $-\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -r \\ s \\ -t \end{pmatrix}$

3. Addieren und Subtrahieren von Vektoren

12

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

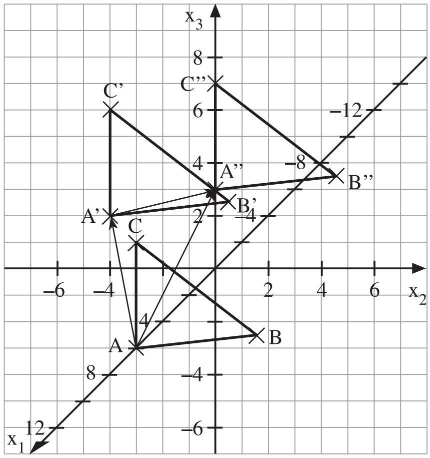
Addition des Gegenvektors entspricht der Subtraktion des Vektors.

3. **a)** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

b) Die Summe (Differenz) zweier Vektoren kann man mithilfe von Diagonalen im aufgespannten Parallelogramm veranschaulichen.

13

4.



A(4 | –1 | –1)
B(3 | 3 | –1)
C(–2 | –4 | 0)

A’(6 | –1 | 5)
B’(5 | 3 | 5)
C’(0 | –4 | 6)

A’’(2 | 1 | 4)
B’’(1 | 5 | 4)
C’’(–4 | –2 | 5)

Man kann das Dreieck ABC auf das Dreieck A’’B’’C’’ mithilfe des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ abbilden.

5. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. a) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$

b) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$

c) $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$

d) $\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC}$

e) $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

f) $\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$

g) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AG}$

h) $\vec{a} - \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{HB}$

8. $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{s}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{r} + \vec{t}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{r}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{r} - \vec{u}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{r} - \vec{u} + \vec{s}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{r}$, $\overrightarrow{CE} = \vec{u} + \vec{r} + \vec{t}$, $\overrightarrow{DA} = -\vec{s} + \vec{u}$, $\overrightarrow{DB} = -\vec{s} + \vec{u} + \vec{r}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{s} + \vec{u} + \vec{r} + \vec{t}$

13

9. Die Überlegung ist falsch. Nach der Dreiecksregel kann man nur einen inneren gemeinsamen Punkt streichen.

10. **a)** $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$

b) Wenn in einem Viereck zwei Seiten zueinander parallel und gleich lang sind, dann sind es auch die anderen beiden Seiten. Das Viereck ist ein Parallelogramm.

11. **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

ABCD ist ein Parallelogramm.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

ABCD ist ein Parallelogramm.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

ABCD ist ein Parallelogramm.

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ABCD ist ein überschlagendes Viereck, kein Parallelogramm.
ABDC ist ein Parallelogramm.

12. Die Ergänzung zu einem Parallelogramm ist nur möglich, wenn die gegebenen Punkte ein Dreieck bilden, also nicht auf einer Geraden liegen.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

D(−2 | 3 | 2)

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

D(1 | 2 | 3)

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D(−1 | 1 | −2)

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D(6 | 8 | −4)

4. Vervielfachen von Vektoren – Linearkombination

16

3. $r \cdot \vec{a} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Gegenvektor zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. a) Nach 1 Stunde: $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Nach 2 Stunden: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 m tief, 4 m nördlich, 1 m westlich.

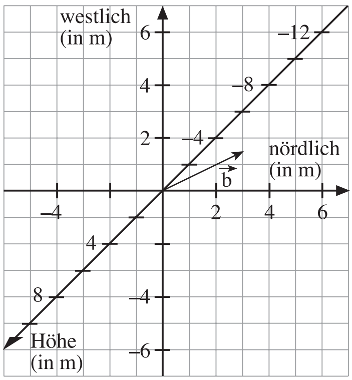
Nach 3 Stunden: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

4,5 m tief, 6 m nördlich, 1,5 m westlich.

Nach 5 Stunden: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

6 m tief, 10 m nördlich, 2,5 m westlich.

b)



5. a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 5 \\ -7{,}5 \\ 6{,}25 \end{pmatrix}$

16

6. **a)** (1) $\vec{v} = 2 \cdot \vec{w}$ (2) $\vec{v} = -3 \cdot \vec{w}$ (3) $\vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \vec{w}$ (4) $\vec{v} = (-3) \cdot \vec{w}$

b) (1) Wegen der ersten Koordinate müsste der Faktor (−1) sein.
Dies passt nicht zur dritten Koordinate.

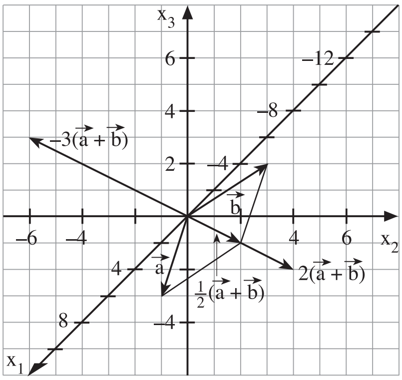
(2) Wegen der ersten Koordinate müsste der Faktor $\frac{1}{2}$ sein.
Dies passt weder zur zweiten noch zur dritten Koordinate.

(3) Wegen der ersten Koordinate müsste der Faktor $\frac{1}{2}$ sein.
Dies passt nicht zur dritten Koordinate.

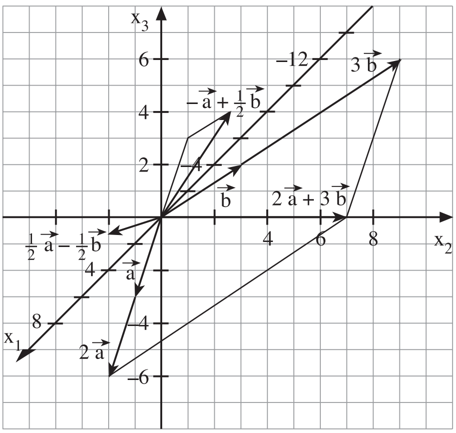
(4) Wegen der ersten Koordinate müsste der Faktor (−1) sein.
Dies passt nicht zur dritten Koordinate.

7. **a)** $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 4{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. **a)**



b)



9. (1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $-\vec{a} + \vec{b}$ (3) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (4) $\frac{1}{2}\vec{b}$

5. Parameterdarstellung einer Geraden

19

1. a) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

a) (1) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$

Mit $t' = \frac{1}{3}t$ erhält man:

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t' \in \mathbb{R}$

(2) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Mit $t' = -\frac{1}{2}t$ erhält man:

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t' \in \mathbb{R}$

Alle Richtungsvektoren sind Vielfache von $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB}$ ist ein Vielfaches von $\vec{v}$.

Daher liegt B auf der Geraden g.
Man erhält weitere Parameterdarstellungen der Geraden g, indem man als Aufpunkt andere Punkte der Geraden auswählt und den Richtungsvektor $\vec{v}$ beibehält.

3. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

20

4. a) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

t = 2: P(−3 | 10 | −3)
t = −1: P(3 | −5 | 0)
t = 0: P = A
t = 2,3: P(−3,6 | 11,5 | −3,3)

b) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

t = 2: P(0,7 | −1 | 11,5)
t = −1: P(0,4 | 2 | −3,5)
t = 0: P = A
t = 2,3: P(0,73 | −1,3 | 13)

c) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ -2 \end{pmatrix}$

t = 2: P(4,5 | −1 | −4)
t = −1: P(−1,5 | −2,5 | 2)
t = 0: P = A
t = 2,3: P(5,1 | −0,85 | −4,6)

5. a) (1) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) (1) $P_2(8 \mid 5 \mid -9)$; $P_{-3}(-7 \mid 0 \mid 11)$

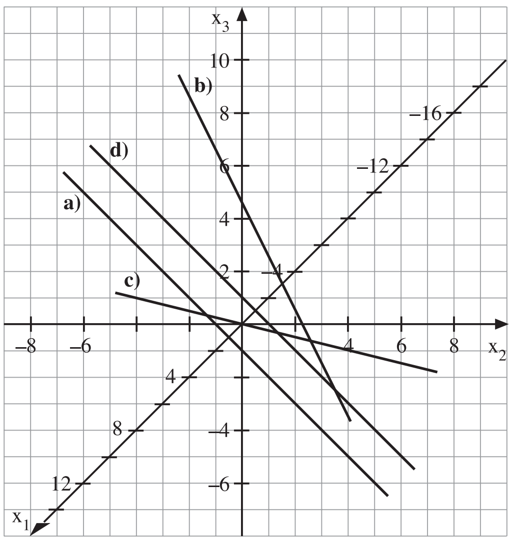
(1) $P_2(1 \mid 0 \mid 9)$; $P_{-3}(-4 \mid 0 \mid 11)$

6. a) A(3 | −2 | 4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) A(−1 | 0 | 3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) A(0 | 0 | 0) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) A(1 | 0 | 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



20

7. **a)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

8. **a)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t'' \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t'' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t'' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist falsch, da $A(1 \mid -6 \mid 3)$ nicht auf der Geraden g liegt und die beiden Richtungsvektoren nicht zueinander kollinear sind.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist falsch, da die beiden Richtungsvektoren nicht zueinander kollinear sind.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist falsch, da $A(1 \mid -1 \mid -3)$ nicht auf der Geraden g liegt und die beiden Richtungsvektoren nicht zueinander kollinear sind.

10. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v}$ beschreibt auch die Gerade g, da der Richtungsvektor kollinear zum Vektor $\vec{u}$ ist und die Trägerpunkte übereinstimmen.

11. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}$ beschreibt auch die Gerade g, da die Richtungsvektoren übereinstimmen und $\overrightarrow{AB}$ kollinear zu $\vec{u}$ ist.

12. Man darf ersetzen, wenn der Richtungsvektor der Geraden kollinear zum Ortsvektor des Aufpunktes ist.

6. Punkt und Gerade

22

1. Punktprobe für A:

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{r} -11 = 1 - 2t \\ 7 = 1 + t \\ 10 = 4 + t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = 6 \\ t = 6 \\ t = 6 \end{array} \right| \quad \text{A liegt auf der Geraden.}$$

Punktprobe für B:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 1 - 2t \\ 2 = 1 + t \\ 6 = 4 + t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array} \right| \quad \text{B liegt nicht auf der Geraden.}$$

Punktprobe für C:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 1 - 2t \\ 2 = 1 + t \\ 5 = 4 + t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t = 1 \end{array} \right| \quad \text{C liegt nicht auf der Geraden.}$$

2. a) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Punktprobe für C:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{r} 0 = 10 - 5t \\ -4 = -6 + t \\ 2 = 14 - 6t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{array} \right|$$

Die Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden.

22

2. b) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -18 \end{pmatrix}$

Punktprobe für C:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -18 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{r} 4 = 7 - 5t \\ 1 = -2 + 10t \\ -3 = 9 - 18t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = \frac{3}{5} \\ t = \frac{3}{10} \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right|$$

Die Punkte A, B, C bilden ein Dreieck.

c) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Punktprobe für C:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{r} -3 = 8 - 15t \\ 3 = 5 - 6t \\ 0 = 3 - 2t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = \frac{11}{15} \\ t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{3}{2} \end{array} \right|$$

Die Punkte A, B, C bilden ein Dreieck.

d) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punktprobe für C:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{r} 4 = -2t \\ -10 = 5t \\ -6 = -3t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{array} \right|$$

Die Punkte A, B, C bilden ein Dreieck.

3. h: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $P(0{,}5 \mid 0 \mid 0)$

Punktprobe für P ergibt: $\left| \begin{array}{r} 0{,}5 = 6 + 11t \\ 0 = 2 + 4t \\ 0 = 1 + 2t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{array} \right|$

P liegt auf der Geraden h. Da es unendlich viele Punkte gibt, die im (ebenen) Koordinatensystem an der gleichen Stelle liegen, kann man dies nicht aus der Zeichnung schließen.

22

3. Fortsetzung

g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; P(−4 | −1 | 1)

Punktprobe für P ergibt: $\begin{vmatrix} -4 = 2 - 4t \\ -1 = -2 + 4t \\ 1 = 2 + t \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{4} \\ t = -1 \end{vmatrix}$

P liegt auf der nicht Geraden g, nur scheinbare Lage auf g.

4. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$; R(−2,5 | 1,2 | 0)

Punktprobe für R: $\begin{vmatrix} -2{,}5 = 2{,}5 - t \\ 1{,}2 = 5 - 8t \\ 0 = 1 - 0{,}2t \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} t = 5 \\ t = \frac{19}{4} \\ t = 5 \end{vmatrix}$

Kurskorrektor nötig

5. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $R(2 \mid r_2 \mid r_3)$

Punktprobe für R bringt für die 1. Koordinate x_1:

2 = 1 − t; t = −1 also R(2 | −3 | −2)

6. a) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Punktprobe für $A(x_1 \mid 1 \mid -1)$ bringt:

$\begin{vmatrix} x_1 = -1 + 2t \\ 1 = 2 + t \\ -1 = 0 + t \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x_1 = -1 + 2t \\ t = -1 \\ t = -1 \end{vmatrix}$; t = −1

Mit t = −1 folgt: $x_1 = -1 - 2 = -3$, also A(−3 | 1 | −1).

Punktprobe für $B(0 \mid x_2 \mid 0)$ bringt:

$\begin{vmatrix} 0 = -1 + 2t \\ x_2 = 2 + t \\ 0 = 0 + t \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} t = \frac{1}{2} \\ x_2 = 2 + t \\ t = 0 \end{vmatrix}$; keine Lösung für t,

B kann nicht auf der Geraden liegen.

22

6. a) Fortsetzung

Punktprobe für $C(1 \mid x_2 \mid x_3)$ bringt:

$$\left|\begin{array}{l} 1=-1+2t \\ x_2=2+t \\ x_3=0+t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} t=1 \\ x_2=2+t \\ x_3=0+t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} t=1 \\ x_2=3 \\ x_3=1 \end{array}\right|; \quad C(1 \mid 3 \mid 1)$$

b) $\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

Punktprobe für $A(x_1 \mid x_2 \mid 2)$ bringt:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=1+2t \\ x_2=2+3t \\ 2=2+2t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} x_1=1+2t \\ x_2=2+3t \\ t=0 \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ t=0 \end{array}\right|; \quad A(1 \mid 2 \mid 2)$$

Punktprobe für $B(x_1 \mid 2 \mid x_3)$ bringt:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=1+2t \\ 2=2+3t \\ x_3=2+2t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} x_1=1+2t \\ t=0 \\ x_3=2+2t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ t=0 \\ x_2=2 \end{array}\right|; \quad B(1 \mid 2 \mid 2)$$

7. Parallelität von Geraden

24

2. Richtungsvektor: 80 m tief, 1 500 m westlich, 518 m seitlich

3. a) $g \nparallel h$, denn die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$g \nparallel k$, denn die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$h \parallel k$: $\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1,5\\-1\end{pmatrix}$

Punktprobe für $(17 \mid 15 \mid 6)$ bei k:

$$\left|\begin{array}{l} 17=5-2t \\ 15=24+1,5t \\ t=0-t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} t=-6 \\ t=-6 \\ t=-6 \end{array}\right|;$$ erfüllt; h und k sind identisch.

b) $g \parallel h$: $\begin{pmatrix}-3\\3\\-9\end{pmatrix}=(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

Punktprobe für $(10 \mid 15 \mid 5)$ bei g:

$$\left|\begin{array}{l} 10=2+t \\ 15=2-t \\ 5=1+3t \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{l} t=8 \\ t=-13 \\ t=\frac{4}{3} \end{array}\right|;$$ nicht erfüllt;

g und h sind zueinander parallel, aber nicht identisch.

24

3. b) Fortsetzung

g || k: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe für (2 | 3 | 3) bei g:

$\begin{vmatrix} 2 = 2 + t \\ 3 = 2 - t \\ 3 = 1 + 3t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} t = 0 \\ t = -1 \\ t = \frac{2}{3} \end{vmatrix}$; nicht erfüllt;

g und k sind zueinander parallel, aber verschieden.

h || k: $\begin{pmatrix} 1,5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1,5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Punktprobe für (6 | −2 | 13) bei h:

$\begin{vmatrix} 6 = 10 - 3t \\ -2 = 15 + 3t \\ 13 = 5 - 9t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} t = \frac{4}{3} \\ t = -\frac{17}{3} \\ t = -\frac{8}{9} \end{vmatrix}$; nicht erfüllt;

h und k sind zueinander parallel, aber verschieden.

c) g || h: $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punktprobe für (1 | 1 | 1) bei g:

$\begin{vmatrix} 1 = 3 + 1,5t \\ 1 = -2 - 2t \\ 1 = 5 + t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} t = -4 \\ t = -\frac{3}{2} \\ t = -4 \end{vmatrix}$; nicht erfüllt;

g und h sind zueinander parallel, aber verschieden.

g || k: $\begin{pmatrix} 1,5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punktprobe für (2 | 3 | 3) bei g:

$\begin{vmatrix} 2 = 3 + 0,5t \\ 3 = -2 - 2t \\ 3 = 5 + t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} t = -2 \\ t = -\frac{5}{2} \\ t = -2 \end{vmatrix}$; nicht erfüllt;

g und k sind zueinander parallel, aber verschieden.

24

3. c) Fortsetzung

$$h \parallel k: \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punktprobe für (2 | 3 | 3) bei h:

$$\left| \begin{aligned} 2 &= 1 + -t \\ 3 &= 1 + 4t \\ 3 &= 1 - 2t \end{aligned} \right| ; \left| \begin{aligned} t &= -1 \\ t &= \tfrac{1}{2} \\ t &= -1 \end{aligned} \right| ; \text{ nicht erfüllt;}$$

h und k sind zueinander parallel, aber verschieden.

4. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. P(3 | 2 | −5) liegt nicht auf g.

Die zu g parallele Gerade durch P hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

8. Schnittpunkt von Geraden – Lineare 3 x 2-Gleichungssysteme

30

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{aligned} 5 + s &= 3 - 2t \\ 3 + 4s &= -5 - 8t \\ -1 - 3s &= 5 + 6t \end{aligned} \right| ; \left| \begin{aligned} s + 2t &= -2 \\ 4s + 8t &= -8 \\ -3s - 6t &= 6 \end{aligned} \right| ; \left| \begin{aligned} s + 2t &= -2 \\ s + 2t &= -2 \\ s + 2t &= -2 \end{aligned} \right|$$

Es wird jeweils dieselbe Gerade beschrieben.

30 **3.** $g \nparallel h$, die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}-r-3s=6\\2r-2s=4\\2r+5s=0\end{array}\right|;\ \text{3. Gleichung von 2. Gleichung subtrahieren ergibt:}$$

$$\left|\begin{array}{r}-r-3s=6\\2r-2s=4\\-7s=4\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}r=-3s-6\\r=s+2\\s=-\frac{4}{7}\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}r=-\frac{30}{7}\\r=\frac{10}{7}\\s=-\frac{4}{7}\end{array}\right|$$

Es entsteht ein Widerspruch; g und h sind zueinander windschief.

$g \nparallel k$, die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}-r+3t=0,5\\2r+2t=4\\2r-5t=-3\end{array}\right|;\ \text{3. Gleichung von 2. Gleichung subtrahieren ergibt:}$$

$$\left|\begin{array}{r}-r+3t=0,5\\2r+2t=4\\7t=7\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}r=3t-0,5\\r=-t+2\\t=1\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}r=2,5\\r=1\\t=1\end{array}\right|;\ \text{Widerspruch}$$

Die Geraden g und k sind zueinander windschief.

$h \parallel k$, die Richtungsvektoren sind kollinear zueinander.

Punktprobe für (2,5 | 4 | 0) bei h:

$$\left|\begin{array}{r}2,5=2-r\\4=0+2r\\0=3+2r\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}r=-\frac{1}{2}\\r=2\\r=-\frac{3}{2}\end{array}\right|;\ \text{h und k sind zueinander parallel, aber verschieden.}$$

4. a) Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r}5+t=-1+4s\\0+2t=-2-2s\\3-t=6-s\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{r}t-4s=-6\\2t+2s=-2\\-t+s=3\end{array}\right|\ \text{1. und 3. Gleichung addieren ergibt:}$$

$$\left|\begin{array}{r}-3s=-3\\2t+2s=-2\\-t+s=3\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}s=1\\t=-s-1\\t=s-3\end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l}s=1\\t=-2\\t=-2\end{array}\right|$$

Gemeinsamer Punkt S(3 | −4 | 5)

30

4. **b)** Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{l} 0+6t=-6+6s \\ -4+7t=-11+7s \\ 5-5t=10+5s \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} 6t-6s=-6 \\ 7t-7s=-7 \\ -5t-5s=s \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} t-s=-1 \\ t-s=-1 \\ t+s=-1 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{r} -1+0=-1 \\ t=-1 \\ s=0 \end{array}\right|$$

Gemeinsamer Punkt S(–6 | –11 | 10)

c) Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{l} 1+t=3+4s \\ 0-t=-2+6s \\ 2+t=4 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{2} \\ s=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3} \\ t=2 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=0 \\ s=0 \\ t=2 \end{array}\right|$$

Gemeinsamer Punkt S(3 | –2 | 4)

5. Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht kollinear zueinander.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} -4t-s=11 \\ 3t-2s=0 \\ 2t-5s=11 \end{array}\right|$$

Die 1. Gleichung und das Doppelte der 3. Gleichung addieren ergibt:

$$\left|\begin{array}{r} -11s=33 \\ 3t-2s=0 \\ 2t-5s=11 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=-3 \\ t=\frac{2}{3}s \\ t=\frac{5}{2}s+\frac{11}{2} \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=-3 \\ t=-2 \\ t=-2 \end{array}\right|$$

Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt A(3 | −1 | −2).

Die Richtungsvektoren von g und k sind nicht kollinear zueinander.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{r} -4t-6s=-2 \\ 3t-s=-4 \\ 2t-8s=-10 \end{array}\right|$$

Die 1. Gleichung und das Doppelte der 3. Gleichung addieren ergibt:

$$\left|\begin{array}{r} -22s=-22 \\ 3t-s=-4 \\ 2t-8s=-10 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=1 \\ t=\frac{1}{3}s-\frac{4}{3} \\ t=4s-5 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{array}\right|$$

Die Geraden g und k schneiden sich im Punkt C(−1 | 2 | 0).

30

5. Fortsetzung
Die Richtungsvektoren von h und k sind nicht kollinear zueinander.

$$\begin{pmatrix}6\\5\\13\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\1\\-8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\1\\8\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{r} t-6s=-13\\ 2t-s=-4\\ 5t-8s=-21\end{array}\right|$$

Die 2. Gleichung vom Doppelten der 1. Gleichung subtrahieren ergibt:

$$\left|\begin{array}{r} -11s=-22\\ 2t-s=-4\\ 5t-8s=-21\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=2\\ t=\frac{1}{2}s-2\\ t=\frac{8}{5}s-\frac{21}{5}\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=1\\ t=-1\\ t=-1\end{array}\right|$$

Die Geraden h und k schneiden sich im Punkt B(5 | 3 | 8).

6. a) $\left|\begin{array}{r} 3+2t=1+2s\\ 6+4t=0+3s\\ 4+t=3-s\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{r} 2t-2s=-2\\ 4t-3s=-6\\ t+s=-1\end{array}\right|$

Das Doppelte der 3. Gleichung von der 1. Gleichung subtrahieren ergibt:

$$\left|\begin{array}{r} -4s=-4\\ 4t-3s=-6\\ t+s=-1\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=1\\ t=\frac{3}{4}s-\frac{3}{2}\\ t=-s-1\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} s=1\\ t=-\frac{3}{4}\\ t=-2\end{array}\right|$$

Keine gemeinsamen Punkte, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.
Die Geraden g, h und k bilden ein Dreieck mit den Eckpunkten A(3 | −1 | −2), B(5 | 3 | 8), C(−1 | 2 | 0).

b) $\left|\begin{array}{r} 0+t=1+2s\\ 1=0+s\\ 1+t=0+s\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{r} t-2s=1\\ -s=-1\\ t-s=-1\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} t=2s+1\\ s=1\\ t=s-1\end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} t=3\\ s=1\\ t=0\end{array}\right|$

Keine gemeinsamen Punkte, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

c) $\left|\begin{array}{r} 5+t=2+3s\\ 5+2t=-1+s\\ 1=0\end{array}\right|;$ Widerspruch

Keine gemeinsamen Punkte, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

7. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

30

8. A: $\left|\begin{array}{r} 6s+2t=-4 \\ -3s+6t=1 \\ -8s+2t=6 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=0 \\ t=0 \\ 0=1 \end{array}\right|;$ Widerspruch, keine Lösung

B: $\left|\begin{array}{r} s-4t=12 \\ -3s-3t=-6 \\ -2s+6t=-20 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=4 \\ t=-2 \\ 0=0 \end{array}\right|;$ Lösung: $s=4$, $t=-2$

31

9. **a)** $g \nparallel h$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} 0+7t=17+s \\ 3-t=15-4s \\ 5+3t=6+2s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{r} 7t-s=17 \\ -t+4s=12 \\ 3t-2s=1 \end{array}\right|$$

2. Gleichung und Doppelte der 3. Gleichung addieren ergibt:

$$\left|\begin{array}{r} 7t-s=17 \\ 5t=14 \\ 3t-2s=1 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=7t-17 \\ t=2,8 \\ s=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2} \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=2,6 \\ t=2,8 \\ s=3,7 \end{array}\right|$$

Keine Lösung, g und h sind windschief zueinander.

$g \nparallel k$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} 0+7t=3+s \\ 3-t=0-s \\ 5+3t=-1+4s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{r} 7t-s=3 \\ -t+s=-3 \\ 3t-4s=1-6 \end{array}\right|$$

1. Gleichung und 2. Gleichung addieren:

$$\left|\begin{array}{r} 6t=0 \\ -t+s=-7 \\ 3t-4s=-6 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=0 \\ s=t-3 \\ s=0,75t+1,5 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=0 \\ s=-3 \\ s=1,5 \end{array}\right|$$

Keine Lösung, g und k sind windschief zueinander.

$h \nparallel k$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} 17+t=3+s \\ 15-4t=0-s \\ 6+2t=-1+4s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{r} t-s=-14 \\ -4t+s=-15 \\ 2t-4s=-7 \end{array}\right|$$

1. und 2. Gleichung addieren:

$$\left|\begin{array}{r} t-s=-14 \\ -3t=-29 \\ 2t-4s=-7 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=t+14 \\ t=\frac{29}{3} \\ s=\frac{1}{2}t+\frac{7}{4} \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} s=\frac{71}{3} \\ t=\frac{29}{3} \\ s=\frac{79}{12} \end{array}\right|$$

Keine Lösung, h und k sind windschief zueinander.

31 **9.** **b)** $g \nparallel h$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} 2-t=4+3s \\ 0+2t=4+2s \\ 3+2t=0-5s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} -t-3s=2 \\ 2t-2s=4 \\ 2t+5s=-3 \end{array}\right|$$

3. Gleichung von 2. Gleichung subtrahieren:

$$\left|\begin{array}{r} -t-3s=2 \\ 2t-2s=4 \\ -7s=7 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=-3s-2 \\ t=s+2 \\ s=-1 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=1 \\ t=1 \\ s=-1 \end{array}\right|$$

Gemeinsamer Punkt $(1 \mid 2 \mid 5)$

$g \nparallel k$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} 2-t=2{,}5-3s \\ 0+2t=4-2s \\ 3+2t=0+5s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} -t+3s=0{,}5 \\ 2t+2s=4 \\ 2t-5s=-3 \end{array}\right|$$

3. Gleichung von 2. Gleichung subtrahieren:

$$\left|\begin{array}{r} -t+3s=0{,}5 \\ 2t+2s=4 \\ 7s=7 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=3s-0{,}5 \\ t=-s+2 \\ s=1 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=2{,}5 \\ t=1 \\ s=1 \end{array}\right|$$

Keine Lösung, g und k sind windschief zueinander.

$h \parallel k$: Richtungsvektoren sind kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{l} 4+3t=2{,}5-3s \\ 4+2t=4-2s \\ 0-5t=0+5s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} 3t+3s=-1{,}5 \\ 2t+2s=0 \\ -5t-5s=0 \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} t=-s-0{,}5 \\ t=-s \\ t=-s \end{array}\right|$$

Keine Lösung, h und k sind zueinander parallel, aber verschieden.

10. **a)** Aufpunkte stimmen überein, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander. g und h schneiden sich im Punkt $P(2 \mid 1 \mid -3)$.

b) Gemeinsamer Aufpunkt $O(0 \mid 0 \mid 0)$, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander. g und h schneiden sich in $O(0 \mid 0 \mid 0)$.

c) $O(0 \mid 0 \mid 0)$ liegt auf h $(t=-1)$, Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander. g und h schneiden sich in $O(0 \mid 0 \mid 0)$.

11. $g \nparallel h$: Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} -p+2t=2+2s \\ 1-8t=6-2s \\ -2-4t=4p-4s \end{array}\right|;\ \left|\begin{array}{l} 2t-2s=p+2 \\ -8t+2s=5 \\ -4t+4s=4p+2 \end{array}\right|$$

1. und 2. Gleichung addieren:

$$\left|\begin{array}{r} -6t=p+7 \\ -8t+2s=5 \\ -4t+4s=4p+2 \end{array}\right|$$

Das Doppelte der 2. Gleichung von der 3. Gleichung subtrahieren:

31

11. Fortsetzung

$$\left| \begin{aligned} -6t &= p+7 \\ -8t+2s &= 5 \\ 12t &= 4p-8 \end{aligned} \right|$$

Das Doppelte der 1. Gleichung zur 3. Gleichung addieren:

$$\left| \begin{aligned} -6t &= p+7 \\ -8t+2s &= 5 \\ 0 &= 6p+6 \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} -6t &= p+7 \\ -8t+2s &= 5 \\ p &= -1 \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} &t = -\tfrac{1}{6}p-\tfrac{7}{6} \\ &s = 4t+2{,}5 \\ &p = -1 \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} &t = -1 \\ &s = -1{,}5 \\ &p = -1 \end{aligned} \right|$$

Für $p = -1$ schneiden sich die Geraden g und h im Punkt $S(-1 \mid 9 \mid 2)$.

12. Helene fasst „p" als dritte Variable auf und gibt die Matrix A ein. Mit rref(A) kann sie die Lösung $t = -1$, $s = -\frac{3}{2}$, $p = -1$ ablesen.

13. **a)** Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.
Für die Existenz des Schnittpunktes muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{aligned} 1+t &= 3-s \\ 0-2t &= -1+s \\ -2+3t &= 1+p\cdot s \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} t+s &= 2 \\ -2t-s &= -1 \\ 3t-p\cdot s &= 3 \end{aligned} \right|$$

1. und 2. Gleichung addieren:

$$\left| \begin{aligned} -t &= 1 \\ -2t-s &= -1 \\ 3t-p\cdot s &= 3 \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} &t = -1 \\ &s = 3 \\ &p = -2 \end{aligned} \right|$$

Die Geraden g und h_{-2} schneiden sich in $S(0 \mid 2 \mid -5)$.

b)
$$\left| \begin{aligned} 1+t &= 0 \\ 0-2t &= 0 \\ -2+3t &= s\cdot p \end{aligned} \right|; \quad \left| \begin{aligned} &t = -1 \\ &t = 0 \\ &t = \tfrac{2}{3}+s\cdot p \end{aligned} \right|;$$

Es liegt ein Widerspruch vor; das System hat keine Lösung.

31

14. Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear zueinander.

$$\left|\begin{array}{r} -k+2t = 2+2s \\ 1-8t = 6-2s \\ -2-4t = 4k-4s \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{r} 2t-2s = 2+k \\ -8t+2s = 5 \\ -4t+4s = 2+4k \end{array}\right|;$$

Doppelte der 1. Gleichung und 3. Gleichung addieren:

$$\left|\begin{array}{l} 0 = 6+6k \\ s = 4t+2{,}5 \\ s = t+k+0{,}5 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} k = -1 \\ s = 4t+2{,}5 \\ s = t-0{,}5 \end{array}\right|$$

2. und 3. Gleichung addieren:

$$\left|\begin{array}{l} k = -1 \\ 0 = 3t+3 \\ s = t-0{,}5 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{l} k = -1 \\ t = -1 \\ s = -1{,}5 \end{array}\right|$$

Mit $k \neq -1$ sind die Geraden g und h windschief zueinander.

15. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix}$ F(131 | 43 | 0)

$$\left|\begin{array}{r} 11+40t = 131 \\ 7+12t = 43 \\ 8+30t = x_3 \end{array}\right|;\quad \left|\begin{array}{r} t = 3 \\ t = 3 \\ x_3 = 98 \end{array}\right| \qquad F'(131\,|\,43\,|\,98)$$

Das Flugzeug ist 98 (LE) hoch.

Im Blickpunkt: Reflexion an Tripelspiegeln

33

1. Der Strahl kommt parallel zurück.

2. **a)** Die Richtung hinsichtlich der x_1-x_2-Ebene wird nicht verändert. Die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate bleiben unverändert (siehe Lösung zu Aufgabe 9 auf Seite 207).
Die Richtung hinsichtlich der x_3-Achse ändert sich vom Positiven ins Negative bzw. umgekehrt.

Reflexion von $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ an der x_1-x_2-Ebene ergibt $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Reflexion von $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ an der x_2-x_3-Ebene ergibt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Man erhält den Gegenvektor zum Ausgangsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Man erhält jeweils den Gegenvektor zum Ausgangsvektor. Das bestätigt die Vermutung aus Aufgabe 1.

9. Aufgaben zur Vertiefung

34

1. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für die Punkte auf der Halbgeraden $\overset{\longmapsto}{AB}$ gilt: $t \geq 0$.

b) Für die Punkte auf der Strecke $\overline{AB}$ gilt: $0 \leq t \leq 1$.

2. $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{M_a M_b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$; zueinander kollinear

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ABCD ist ein Parallelogramm, Gegenseiten sind parallel zueinander.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

überschlagenes Viereck ABCD; Parallelogramm ABDC

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Parallelogramm ABCD

4. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\vec{a} \; \left[\frac{p}{p+q} \cdot \vec{a}\right]$; $\qquad \overrightarrow{AF} = \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{a} \; \left[\vec{b} + \frac{q}{p+q} \cdot \vec{a}\right]$;

$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} \; \left[\vec{a} + \frac{r}{r+s} \cdot \vec{b}\right]$; $\qquad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{5}\vec{b} \; \left[\frac{r}{r+s} \cdot \vec{b}\right]$

b) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a} = \frac{1}{5}\vec{a} + \vec{b} \; \left[\frac{q-p}{q+p}\vec{a} + \vec{b}\right]$

$\overrightarrow{GH} = -\frac{4}{5}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = -\frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a} \; \left[\frac{s-r}{s+r}\vec{b} - \vec{a}\right]$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = -\frac{3}{10}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{AM_{EF}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AM_{GH}} = \vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} + \left(-\frac{3}{10}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Die beiden Mittelpunkte fallen zusammen und stimmen mit dem Mittelpunkt des Parallelogramms überein.

34

5. a) $\begin{pmatrix} 3+4n \\ 2-n \\ -1+2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Geradengleichung

x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$; $n = \frac{1}{2}$; $S_3(5 \mid 1{,}5 \mid 0)$

x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$; $n = 2$; $S_2(11 \mid 0 \mid 3)$

x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$; $n = -\frac{3}{4}$; $S_1(0 \mid 2{,}75 \mid -2{,}5)$

b) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$

Schnitt zweier Geraden:

$$\left| \begin{array}{c} 4+t = 4+s \\ 1 = 1 \\ -2a_1 - a_1 \cdot t = -2a_2 - a_2 \cdot s \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{c} t = s \\ 1 = 1 \\ a_1(-2-t) = a_2(-2-t) \end{array} \right|;$$

$t = -2$, $P(2 \mid 1 \mid 0)$, unabhängig von a

6. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$; $P'(3{,}1 \mid 2{,}2 \mid x_3)$

Punktprobe ergibt:

$$\left| \begin{array}{c} 3{,}1 = 3 + 0{,}4t \\ 2{,}2 = 2 + 0{,}8t \\ x_3 = 0{,}1 + 0{,}4t \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{4} \\ x_3 = 0{,}2 \end{array} \right|; \quad P'(3{,}1 \mid 2{,}2 \mid 0{,}2)$$

Der Pfeiler muss 0,05 km (50 m) hoch sein.