2 BEURTEILENDE STATISTIK

92

1. Durch die Aufgabenstellung soll eine Diskussion unter den Schülerinnen und Schülern angeregt werden, welche Ergebnisse als „akzeptabel“ und welche als „Verdächtig“ bezeichnet werden können. Beispielsweise könnten Wahrscheinlichkeitsberechnungen oder Simulationen erfolgen.
$n = 100$; $p = 0{,}5$; $P(42 \le X \le 58) \approx 90\,\%$

2. Ähnlich wie in Aufgabe 1 soll die Diskussion angeregt werden. Hier wird jedoch gezielter über eine Entscheidungsregel nachgedacht.
$n = 200$; $p = 0{,}5$; $P(89 \le X \le 111) \approx 90\,\%$

3. Man kann davon ausgehen, dass die Schülerinnen und Schüler einen Ansatz für die Rechnungen finden. Wichtig ist, dass sie erkennen, dass es zufällige Abweichungen vom Erwartungswert $\mu = 190$ geben kann.
a) Die Wahrscheinlichkeit beträgt 3,67 %.
b) Es kann vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt 16,66 %.
c) Die Wahrscheinlichkeit beträgt 66,67 %.

93

4. Die Grafik zeigt die relative Häufigkeit für das Auftreten der Zahlen 1, 13 und 49 in Abhängigkeit der Anzahl der Ziehungen. Man kann erkennen, dass alle drei Kurven am Anfang starke Veränderungen vollziehen, d. h. für kleinere Ziehungszahlen variieren die jeweiligen Werte stark. Mit zunehmender Ziehungszahl werden die Verläufe glatter. Die jeweiligen Häufigkeiten scheinen sich festen Werten anzunähern und es scheint, dass diese Werte sich voneinander unterscheiden, obwohl für jede der Zahlen die Wahrscheinlichkeit für eine Ziehung gleich groß ist $\left(p = \frac{6}{49}\right)$. Dies bereitet darauf vor, dass auch bei $n = 3\,000$ Versuchsdurchführungen Abweichungen vom erwarteten Wert auftreten können.

5. Die einem n-stufigen Bernoulli-Versuch kann die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ der Erfolge als Schätzwert für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p genommen werden. Diese so genannte Punktschätzung macht aber keine Aussage über den möglichen Fehler. Bei einer Intervallschätzung wird eine Sicherheitswahrscheinlichkeit vorgegeben und dazu ein Konfidenzintervall konstruiert. Die Sicherheitswahrscheinlichkeit gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Ansatz zu einem Intervall führt, das den wahren Wert von p enthält.
In der Abbildung wird eine binomialverteilte Grundgesamtheit mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ betrachtet.
Aus einer Stichprobe von $n = 50$ Wiederholungen soll die als unbekannt angenommene Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden. Dargestellt sind hier Konfidenzintervalle mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 %, d. h. in 90 % aller Versuche wird der unbekannte Wert p von dem Intervall überdeckt. Es wurden 10 solcher Intervalle berechnet. Die grün markierten Intervalle „treffen“ den Wert, während das rote den Wert nicht enthält.

2.1 Grundprobleme der Beurteilenden Statistik

2.1.1 Punkt- und Intervallschätzung zu erwartender absoluter Häufigkeiten

96 **2.** **a)** Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit:
Ca. 90% der Zahlen werden mit ihrer Ziehungshäufigkeit zwischen 337 und 397 (einschließlich) liegen, d. h. ca. 45 der 49 Zahlen.

b) In der 1,96σ-Umgebung liegen ca. 95 % der Zahlen, also etwa 46 bis 47 Zahlen.
In der 2,58σ-Umgebung liegen ca. 99 % der Zahlen, also etwa 48 bis 49 Zahlen.

c) Die 1,96σ-Umgebung umfasst Werte 332 bis 403. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert außerhalb dieses Bereichs angenommen wird, ist 0,0449. Also liegen ca. $0{,}0449 \cdot 49 = 2{,}19 \approx 2$ Zahlen außerhalb dieses Bereichs.

3. **a)** (1) ... außerhalb der 1,64σ-Umgebung von μ liegen [1,96σ-Umgebung, 2,58σ-Umgebung] oder auch unter 337 oder über 397 [unter 332 oder über 403, unter 321 oder über 414].
(2) ... außerhalb der 1,64σ-Umgebung von μ liegen [1,96σ-Umgebung, 2,58σ-Umgebung] oder auch unter 41 oder über 59 [unter 40 oder über 60, unter 37 oder über 63].
(3) … 337. [… 397].

b) Bei 10 % muss die 1,28σ-Umgebung betrachtet werden. [Bei 1 % muss die 2,33σ-Umgebung betrachtet werden.]

97 **4.**

Geburten 2007	männlich	weiblich	gesamt	$\mu_{weiblich}$	$1{,}96\sigma$	$\mu - 1{,}96\sigma$	$\mu + 1{,}96\sigma$	Abweichung
Baden-Württ.	47 382	45 441	92 823	45 112,0	298,46	44 813,5	45 410,4	signifikant
Bayern	54 640	52 230	106 870	51 938,8	320,25	51 618,6	52 259,1	verträglich
Berlin	16 135	15 039	31 174	15 150,6	172,96	14 977,6	15 323,5	verträglich
Brandenburg	9 547	9 042	18 589	9 034,3	133,56	8 900,7	9 167,8	verträglich
Bremen	2 865	2 726	5 591	2 717,2	73,25	2 644,0	2 790,5	verträglich
Hamburg	8 636	8 091	16 727	8 129,3	126,70	8 002,6	8 256,0	verträglich
Hessen	27 095	25 521	52 616	25 571,4	224,71	25 346,7	25 796,1	verträglich
Meckl.-Vorp.	6 561	6 225	12 789	6 214,0	110,77	6 103,3	6 324,8	verträglich
Niedersachs.	33 689	31 637	65 326	31 748,4	250,38	31 498,1	31 998,8	verträglich
Nordrhein-Westf.	77 579	73 589	151 168	73 467,6	380,88	73 086,8	73 848,5	verträglich
Rheinl.-Pfalz	16 801	15 735	32 536	14 812,5	176,70	15 635,8	15 989,2	verträglich
Saarland	3 723	3 551	7 274	3 535,2	83,55	3 451,6	3 618,7	verträglich
Sachsen	17 424	16 434	33 858	16 455,0	180,25	16 274,7	16 635,2	verträglich
Sachsen-Anhalt	8 942	8 445	17 387	8 450,1	129,17	8 320,9	8 579,3	verträglich
Schleswig-Holstein	11 895	11 066	22 961	11 159,0	148,44	11 010,6	11 307,5	verträglich
Thüringen	8 925	8 251	17 176	8 347,5	128,39	8 219,2	8 475,9	verträglich
gesamt	351 839	333 023	684 862					
(Anteil)	51,4 %	48,6 %						

97

5. 90 %: Berechne die 1,64σ-Umgebung: $\mu - 1{,}64\sigma \approx 431{,}6$;
$\mu + 1{,}64\sigma \approx 474{,}1$
Kontrollrechnung: $P(431 \le X \le 475) \approx 0{,}917$; $P(432 \le X \le 474) \approx 0{,}903$
Daher liegt die Anzahl der Haushalte mit DVD-Player mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % im Intervall [432, 474].
95 %: Berechne die 1,96σ-Umgebung: $\mu - 1{,}64\sigma \approx 427{,}5$;
$\mu + 1{,}96\sigma \approx 478{,}3$.
Kontrollrechnung: $P(427 \le X \le 479) \approx 0{,}959$; $P(428 \le X \le 478) \approx 0{,}951$
Daher liegt die Anzahl der Haushalte mit DVD-Player mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % im Intervall [428, 478].

98

6. (1) $n = 180$; $p = 0{,}167$; $\mu = 30$; $\sigma = 5$
90%-Umgebung: [21; 39] $P(21 \le X \le 39) = 0{,}943$
95%-Umgebung: [20; 40] $P(20 \le X \le 40) = 0{,}965$
99%-Umgebung: [17; 43] $P(17 \le X \le 43) = 0{,}993$

(2) $n = 234$; $p = 0{,}167$; $\mu = 39$; $\sigma = 5{,}7$
90%-Umgebung: [29; 49] $P(29 \le X \le 49) = 0{,}935$
95%-Umgebung: [27; 51] $P(27 \le X \le 51) = 0{,}972$
99%-Umgebung: [24; 54] $P(24 \le X \le 54) = 0{,}994$

(3) $n = 3000$; $p = 0{,}167$; $\mu = 500$; $\sigma = 20{,}41$
90%-Umgebung: [466; 534] $P(466 \le X \le 534) = 0{,}909$
95%-Umgebung: [459; 541] $P(459 \le X \le 541) = 0{,}958$
99%-Umgebung: [447; 553] $P(447 \le X \le 553) = 0{,}991$

(4) $n = 1932$; $p = 0{,}167$; $\mu = 322$; $\sigma = 16{,}38$
90%-Umgebung: [295; 349] $P(295 \le X \le 349) = 0{,}907$
95%-Umgebung: [289; 355] $P(289 \le X \le 355) = 0{,}959$
99%-Umgebung: [279; 365] $P(279 \le X \le 365) = 0{,}992$

7. **a)** $n = 1\,500$; $p = \frac{6}{49}$
Punktschätzung: 184
Intervallschätzung:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % liegt die Ziehungshäufigkeit im Intervall [159; 208], d. h. unter der Information, dass in den ersten 1500 Versuchen 179 Erfolge gezählt wurden, erhalten wir für n = 3000 eine 95 %-Umgebung von [338; 387].
Ohne die Information, dass in den ersten 1500 Versuchen 179 Erfolge gezählt wurden, erhalten wir für n = 3000 eine 95 %-Umgebung von [332; 403].

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% liegt die Ziehungshäufigkeit außerhalb des Intervalls [338; 387].

98

8. **a)** $p = 0{,}631$; $n = 875$; $\mu = 552{,}1$; $\sigma = 14{,}27$
95 %-Umgebung von μ: 524, ..., 580
Kontrollrechnung: $P(524 \le X \le 580) \approx 0{,}954$
Das Ergebnis von 545 verteilten Plaketten liegt in diesem Bereich.

b) (1) $p = \frac{5070}{8310} \approx 0{,}610;\ n = 1008$
95 %-Umgebung: 585, ..., 645
Ergebnis am unteren Rand der Umgebung; evtl. Prüfer sehr genau.

(2) $p = \frac{3204}{4920} \approx 0{,}659;\ n = 1072$
95 %-Umgebung: 676, ... 736
Ergebnis im erwarteten Bereich.

(3) $p = \frac{4180}{6770} \approx 0{,}617;\ n = 1229$
95 %-Umgebung: 726, ... 792
Ergebnis liegt oberhalb des erwarteten Bereichs, d. h. der Prüfer war zu nachsichtig.

9. $p = \frac{1}{37};\ n = 3700$

90 %- Umgebung zwischen 84 und 116
95 %- Umgebung zwischen 81 und 119
99 %- Umgebung zwischen 75 und 125

10. $p = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{421}{1240};$

$n = 100$; $\mu = 33{,}95$; $\sigma = 4{,}74$
90 %- Umgebung zwischen 26 und 42
95 %- Umgebung zwischen 25 und 43
99 %- Umgebung zwischen 22 und 46

$n = 200$; $\mu = 67{,}90$; $\sigma = 6{,}70$
90 %- Umgebung zwischen 56 und 79
95 %- Umgebung zwischen 55 und 81
99 %- Umgebung zwischen 51 und 85

$n = 500$; $\mu = 169{,}76$; $\sigma = 10{,}59$
90 %- Umgebung zwischen 153 und 187
95 %- Umgebung zwischen 149 und 191
99 %- Umgebung zwischen 143 und 197

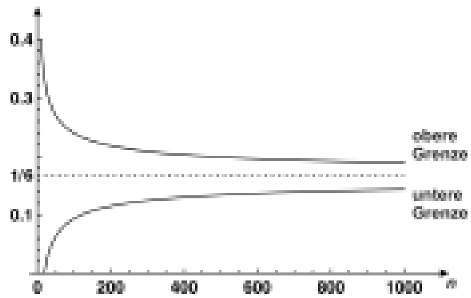
2.1.2 Schätzung zu erwartender relativer Häufigkeiten – signifikante Abweichungen

101

2. $p = \frac{1}{6}$

n	σ	$\frac{\sigma}{n}$	$p - 1{,}96\frac{\sigma}{n}$	$p + 1{,}96\frac{\sigma}{n}$
100	3,727	0,037	0,094	0,240
200	5,270	0,026	0,115	0,218
300	6,455	0,022	0,124	0,209
400	7,454	0,019	0,130	0,203
500	8,333	0,017	0,134	0,199

Die Breite der Umgebung verhält sich etwa umgekehrt proportional zur Wurzel aus dem Stichprobenumfang.



3.

Partei	Prognose	Wahler-gebnis p	$1{,}96\frac{\sigma}{n}$-Umgebung von p	Bewertung
CDU	0,43	0,411	[0,4045; 0,4175]	signifikante Abweichung
SPD	0,095	0,098	[0,0941; 0,1019]	keine signifikante Abweichung
FDP	0,06	0,059	[0,0559; 0,0621]	keine signifikante Abweichung
Grüne	0,05	0,051	[0,0481; 0,0539]	keine signifikante Abweichung
PDS	0,225	0,236	[0,2304; 0,2416]	signifikante Abweichung

101

4. Berlin

Partei	Prognose	Wahlergebnis p	$1{,}96\frac{\sigma}{n}$-Umgebung von p	Bewertung
CDU	0,251	0,213	[0,2078; 0,2182]	keine signifikante Abweichung
SPD	0,31	0,308	[0,3021; 0,3139]	keine signifikante Abweichung
FDP	0,075	0,076	[0,0726; 0,0794]	keine signifikante Abweichung
Grüne	0,135	0,131	[0,1267; 0,1353]	keine signifikante Abweichung
PDS	0,135	0,134	[0,1297; 0,1383]	keine signifikante Abweichung

Bundestag

Partei	Prognose	Wahlergebnis p	$1{,}96\frac{\sigma}{n}$-Umgebung von p	Bewertung
CDU	0,355	0,352	[0,3491; 0,3549]	signifikante Abweichung
SPD	0,34	0,342	[0,3391; 0,3449]	keine signifikante Abweichung
FDP	0,105	0,098	[0,0962; 0,0998]	signifikante Abweichung
Grüne	0,085	0,081	[0,0793; 0,0827]	signifikante Abweichung
PDS	0,075	0,087	[0,0853; 0,0887]	keine signifikante Abweichung

5. $n = 500$; $p = 0{,}76$

95 %-Umgebung von p: $0{,}723 \le \frac{X}{n} \le 0{,}797$

Das Ergebnis der Stichprobe weicht signifikant von p ab, falls $\frac{X}{n} < 0{,}723$ oder $\frac{X}{n} > 0{,}797$.

Mögliche Begründung: Zufällige Abweichung (Wahrscheinlichkeit 5 %) oder Veränderung von p.

102

6. $n = \frac{35\,671\,952{,}25\text{ €}}{0{,}75\text{ €}} = 47\,562\,603$

$P = P(\text{6 Richtige}) = P(\text{Klasse I oder II}) = \frac{1}{13\,983\,816}$

Punktschätzung: $\mu \approx 3{,}4$

$1{,}96\sigma \approx 3{,}6$; 95 %-Umgebung: $0 \le X \le 7$

Die Anzahl der Gewinner in der Gewinnklasse I oder II liegt deutlich oberhalb des Intervalls. Dies geschieht immer dann, wenn die gezogenen Glückszahlen beliebte Zahlen sind, denn Lottotipps sind keine Zufallsversuche!

102 **7. a)** $p = 0{,}487$; $n = 633$; $\mu = 308{,}27$; $\sigma = 12{,}58$
95 %-Umgebung von p: [0,447; 0,525]
$\frac{X}{n} = \frac{318}{633} = 0{,}502$ liegt in der 95 %-Umgebung. Das Stichprobenergebnis ist verträglich mit den bundesweiten Ergebnissen.

b)

Monat	n	$\frac{X}{n}$	95 %-Umgebung	Stichprobenergebnis
Jan.	110	0,482	[0,392; 0,580]	verträglich mit p = 0,486
Febr.	90	0,478	[0,382; 0,590]	verträglich mit p = 0,486
März	121	0,562	[0,396; 0,580]	verträglich mit p = 0,486
April	107	0,467	[0,391; 0,576]	verträglich mit p = 0,486
Mai	106	0,509	[0,390; 0,582]	verträglich mit p = 0,486
Juni	99	0,505	[0,387; 0,585]	verträglich mit p = 0,486

c)

Wochentag	n	$\frac{X}{n}$	95 %-Umgebung	Stichprobenergebnis
Montag	95	0,568	[0,385; 0,587]	verträglich mit p = 0,486
Dienstag	84	0,548	[0,379; 0,593]	verträglich mit p = 0,486
Mittwoch	102	0,471	[0,389; 0,583]	verträglich mit p = 0,486
Donnerstag	94	0,372	[0,384; 0,588]	signifikant abweichend
Freitag	103	0,476	[0,389; 0,583]	verträglich mit p = 0,486
Samstag	93	0,548	[0,384; 0,588]	verträglich mit p = 0,486
Sonntag	62	0,565	[0,361; 0,611]	verträglich mit p = 0,486

d) $n = 600\,000$; $p = 0{,}486$; $\frac{\sigma}{n} = 0{,}00065$;
95 %-Umgebung von p: [0,4847; 0,4873]
Alle Anteile zwischen 48,47 % und 48,73 % sind mit p = 48,6 % verträglich.

8. $n = 3000$; $p = \frac{6}{49}$; $\mu = 367{,}35$; $\sigma = 17{,}95$;
95 %-Umgebung von μ: [332; 403]
Die Ziehungshäufigkeit von 13 liegt unterhalb, die von 32, 38, 49 oberhalb der 95 %-Umgebung.

2.1.3 Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit

105 **2. a)** Ergibt sich aus b).
b) kleinste Wahrscheinlichkeit: p = 0,590;
größte Wahrscheinlichkeit: p = 0,649

106 **3.** (1) [0,758; 0,776] (3) [0,476; 0,498]
(2) [0,590; 0,610] (4) [0,280; 0,300]

106

4. **a)** 95 %-Konfidenzintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p:
[0,526; 0,660]
Es lohnt sich also, zu wetten.

b) 95 %-Konfidenzintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p:
[0,482; 0,672]
Es lohnt sich also nicht, zu wetten.

5. Man kennt die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p nicht; daher ist der dargestellte Ansatz falsch; p_{min} und p_{max} sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\left|\frac{40}{400} - p\right| \leq 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}} \Leftrightarrow 400 \cdot (0{,}1 - p)^2 \leq 1{,}96^2 \cdot p(1-p)$$

Allerdings ist der Fehler nicht allzu groß, wenn $p \approx 0{,}5$. Das 95 %-Konfidenzintervall ist: $0{,}075 \leq p \leq 0{,}133$; eine Näherungslösung mithilfe von

$$p_{min} = \frac{X}{n} - 1{,}96\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\cdot\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}}; \quad p_{max} = \frac{X}{n} + 1{,}96\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\cdot\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}}$$

ist hier nicht zulässig.

6. **-**

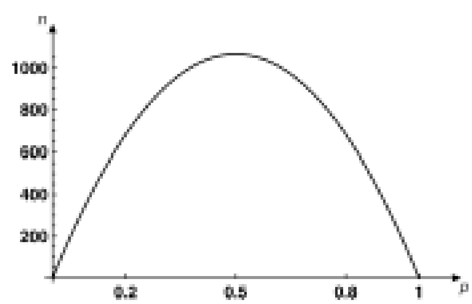
7. (1) [0,136; 0,205]
Die Anzahl der Rentiere liegt zwischen ca. 972 und 1481.
(2) [0,151; 0,289]
Die Anzahl der Fische liegt zwischen ca. 414 und 795.

2.1.4 Bestimmen eines genügend großen Stichprobenumfangs

108

2. Für $n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}534 \cdot 0{,}466}{0{,}033^2} \approx 878$ ist die Schätzung auf 3,3 Prozentpunkte genau.

3. **a)** Es gilt $n = \frac{1{,}96^2 \cdot p \cdot (1-p)}{0{,}03^2}$. Es besteht ein quadratischer Zusammenhang, wobei der Stichprobenumfang bei p = 0,5 maximal wird.



Wenn p unbekannt ist, muss für n das Maximum der Parabel gewählt werden. Im Beispiel: $n \approx 1068$.

108 **3. b)** (1) $n \geq \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}005^2} = 66\,564$ (2) $n \geq \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94}{0{,}002^2} = 93\,855$

4. a) ungünstiger Wert für p: p = 0,5

$n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}01^2} = 9\,604$

b)/c) $n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}{0{,}01^2} = 7\,203$, das sind 75% von 9 604

d) $n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}01^2} = 9\,220$, das sind 96% von 9 604

[$n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}{0{,}01^2} = 3\,458$, das sind 36% von 9 604

$n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}01^2} = 6\,147$, das sind 64% von 9 604]

5. a) Durch $x^2 + y^2 = 1$ wird ein Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 beschrieben. Ein Viertel seiner Fläche enthält Punkte mit nicht negativen Koordinaten, daher gilt $p = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$.

b) 95 %-Umgebung von $\frac{\pi}{4} = \left[\frac{\pi}{4} - 0{,}25;\ \frac{\pi}{4} + 0{,}25\right] = [0{,}760; 0{,}811]$

Daraus ergibt sich für π die Schätzung [3,040; 3,243]

c) $2{,}58\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n}} \leq 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1{,}12 \cdot 10^6$

108 **d)** Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Flächenanteil der farbig unterlegten Figur innerhalb des Quadrats. Die Hälfte der nicht farbig unterlegten Fläche hat das Flächenmaß: $1 - \frac{\pi}{4}$, also

$p = 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571$

2.2 Alternativtest

2.2.1 Entscheidungsverfahren und mögliche Fehler

112 **1.** $\alpha = P_{0,8}(X \leq 15) = 0{,}370$; $\beta = P_{0,6}(X > 15) = 1 - P_{0,6}(X \leq 15) = 0{,}051$
[$\alpha = P_{0,8}(X \leq 13) = 0{,}087$; $\beta = P_{0,6}(X > 13) = 1 - P_{0,6}(X \leq 13) = 0{,}250$
$\alpha = P_{0,8}(X \leq 16) = 0{,}589$; $\beta = P_{0,6}(X > 16) = 1 - P_{0,6}(X \leq 16) = 0{,}016$]

2. Bei einem Stichprobenumfang von n = 50 kann man bei dem alten Medikament mit $50 \cdot 0{,}6 = 30$ und bei dem neuen Medikament mit $50 \cdot 0{,}8 = 40$ Erfolgen rechnen.
K = 35,5; V = {0,1; … 35}; A = {36; … 50}
$\alpha = P_{0,8}(X \leq 35) = 0{,}061$; $\beta = P_{0,6}(X > 35) = 1 - P_{0,6}(X \leq 35) = 0{,}054$

112

3. In einer Stichprobe vom Umfang $n = 40$ soll über die Hypothesen H_1: $p_1 = 0{,}08$ oder H_2: $p_2 = 0{,}15$ entschieden werden.
Die Erwartungswerte sind $\mu_1 = 40 \cdot 0{,}08 = 3{,}2$ und $\mu_2 = 40 \cdot 0{,}15 = 6$.
Man könnte also einen kritischen Wert zwischen diesen beiden Erwartungswerten festlegen. Hierfür gilt (vgl. Tabelle unten):
$P_{p1\,=\,0{,}08}(X \geq 5) = 1 - 0{,}787 = 0{,}213$ und $P_{p2\,=\,0{,}15}(X \leq 4) = 0{,}263$
d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 21,3 % würde die Anzahl der Dachziegel mit Mängeln oberhalb des kritischen Werts liegen, obwohl es sich um Dachziegel 1. Wahl handelt, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 26,3 % würde die Anzahl der Dachziegel mit Mängeln unterhalb des kritischen Werts liegen, obwohl es sich um Dachziegel 2. Wahl handelt.
Hier geht es aber nicht um die Entscheidung eines Außenstehenden, der daher den kritischen Wert zwischen den beiden Erwartungswerten wählt, sondern um die Entscheidung aufgrund eines Standpunkts.
Der Bauunternehmer (Kunde) nimmt einen skeptischen Standpunkt ein, d. h. vermutet also, dass es sich um Dachziegel 2. Wahl handelt , d. h. $p_2 = 0{,}15$ der Stichprobe zugrunde liegt. Von diesem Standpunkt lässt er sich nur abbringen, wenn die Anzahl von Dachziegeln mit Mängeln deutlich unterhalb des Erwartungswerts μ_2 liegt.
An der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung lesen wir ab:

k	$P(X \leq k)$ für $p_1 = 0{,}08$	$P(X \leq k)$ für $p_2 = 0{,}15$
0	0,036	0,002
1	0,159	0,012
2	0,369	0,049
3	0,601	0,130
4	0,787	0,263
5	0,903	0,433
6	0,962	0,607
7	0,987	0,756

Wenn der Bauunternehmer (Kunde) als Entscheidungsregel festlegt, die Hypothese $p_2 = 0{,}15$ zu verwerfen, falls weniger als 3 mangelhafte Dachziegel gefunden werden, dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art gleich $P_{p2\,=\,0{,}15}(X \leq 2) = 0{,}049$.
Dagegen wird ein Vertreter der Firma anders argumentieren: Es handelt sich um Dachziegel 1. Wahl, d. h. es gilt: $p_1 = 0{,}08$. Von diesem Standpunkt lasse ich mich nur abbringen, wenn in der Stichprobe ungewöhnlich viele defekte Dachziegel gefunden werden. Er wird daher beispielsweise formulieren:
Verwirf die Hypothese $p_1 = 0{,}08$, falls mehr als 6 defekte Dachziegel in der Stichprobe gefunden werden; hierfür gilt:
$P_{p1\,=\,0{,}08}(X > 6) = 1 - 0{,}962 = 0{,}038$

113

4. Wenn die Münze 100-mal geworfen wird, sind $\mu_1 = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ oder $\mu_2 = 100 \cdot 0{,}6 = 60$ Wappen zu erwarten. Man kann dann willkürlich einen Wert festlegen, von dem ab man die eine oder die andere Hypothese für richtig halten will.
Beispielsweise kann man sich wie folgt entscheiden:
Falls weniger als 56-mal Wappen fällt, dann hält man $p_1 = 0{,}5$ für richtig, sonst $p_2 = 0{,}6$.
Wenn man so verfährt, kann es vorkommen, dass es sich tatsächlich um eine LAPLACE-Münze handelt, aber zufällig mehr als 55-mal Wappen auftritt, was dazu führt, dass man $p_2 = 0{,}6$ für richtig hält.
Ein solches Ereignis tritt ein mit Wahrscheinlichkeit
$P_{p1 = 0,5}(X > 55) = 1 - P_{p1 = 0,5}(X \leq 55) = 1 - 0{,}864 = 0{,}136$.
Oder es kann vorkommen, dass es sich nicht um eine LAPLACE-Münze handelt, aber zufällig weniger als 56-mal Wappen auftritt, was dazu führt, dass man $p_1 = 0{,}5$ für richtig hält.
Ein solches Ereignis tritt ein mit Wahrscheinlichkeit
$P_{p2 = 0,6}(X \leq 55) = 0{,}179$.

5. Wie in der Information (3) ausgeführt, gilt:
Wenn man den Zufallsversuch mit 20 Personen sehr oft durchführt, wird in 19,6 % der Fälle ein Versuchsergebnis eintreten, aufgrund dessen man das neue Medikament nicht einführt, obwohl es besser ist, d. h. bei einer 100fachen Simulation des Zufallsversuchs wird es ungefähr 20-mal vorkommen, dass man die richtige Hypothese $p_2 = 0{,}8$ verwirft.
Wenn man den Zufallsversuch mit 20 Personen sehr oft durchführen wurde, wird in 12,6 % der Fälle ein Versuchsergebnis eintreten, aufgrund dessen man das neue Medikament einführt, obwohl es nicht besser ist, d. h. bei einer 100fachen Simulation des Zufallsversuchs wird es ungefähr 13-mal vorkommen, dass man die richtige Hypothese $p_1 = 0{,}6$ verwirft.

6. Hypothese: Es wird regnen.

	Man nimmt Regenbekleidung mit	Man nimmt keine Regenbekleidung mit
Es regnet	Entscheidung richtig	Entscheidung falsch (Fehler 1. Art)
Es regnet nicht	Entscheidung falsch (Fehler 2. Art)	Entscheidung richtig

113 **7.** Hypothese: Die Ware ist in Ordnung.

Fehler 1. Art	*Fehler 2. Art*
Bei der Kontrolle fallen relativ viele Mängelexemplare auf, obwohl die Qualitätsbedingungen insgesamt erfüllt sind. Die Ware wird nicht ausgeliefert bzw. nicht angenommen, obwohl sie in Ordnung ist. (Produzentenrisiko)	Bei der Kontrolle fällt nicht auf, dass die Qualitätsbedingungen für das Warenkontingent insgesamt nicht erfüllt sind. Die Ware wird ausgeliefert bzw. angenommen, obwohl sie nicht in Ordnung ist. (Konsumentenrisiko)

8. (1) Hypothese: Die Eisdecke trägt nicht.

Fehler 1. Art	*Fehler 2. Art*
Die Eisdecke trägt nicht; man sinkt also ein. Man geht auf das Eis, weil die Steine die Eisfläche nicht zerbrachen.	Die Eisdecke würde tragen; aber man geht nicht auf das Eis, weil die Steine die Eisdecke zerbrachen.

(2) Hypothese: Der Angeklagte hat den Diebstahl nicht begangen.

Fehler 1. Art	*Fehler 2. Art*
Der Angeklagte wird verurteilt, weil die Indizien gegen ihn sprechen; in Wirklichkeit ist er aber unschuldig.	Der Angeklagte wird nicht verurteilt, weil die Indizien nicht ausreichen; in Wirklichkeit ist er jedoch schuldig.

(3) Hypothese: Die Glühbirnen sind von langer Lebensdauer

Fehler 1. Art	*Fehler 2. Art*
Die Glühbirnen werden für kurzlebig gehalten, weil das Ergebnis einer Stichprobe zufällig ungünstig ist; tatsächlich sind sie von langer Lebensdauer.	Die Glühbirnen sind von kurzer Lebensdauer; man merkt es jedoch bei einer Stichprobe nicht.

(4) Hypothese: Die Äpfel sind 1. Wahl

Fehler 1. Art	*Fehler 2. Art*
Die Äpfel sind von 1. Wahl Bei der Kontrolle treten so viele schlechte Äpfel auf, dass die Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.	Die Äpfel sind von 2. Wahl Bei der Kontrolle treten so viele gute Äpfel auf, dass die Hypothese fälschlicherweise akzeptiert wird.

113

9. Wir betrachten wieder die Zufallsgröße X: *Anzahl der Heilungen*.
Für n = 20 und $p_1 = 0{,}6$ ist $\mu_1 = 20 \cdot 0{,}6 = 12$ und für $p_2 = 0{,}7$ ist $\mu_2 = 20 \cdot 0{,}7 = 14$

k	$P(X \le k)$ für $p_1 = 0{,}6$	$P(X \le k)$ für $p_2 = 0{,}7$
…		
8	0,057	0,005
9	0,128	0,017
10	0,245	0,048
11	0,404	0,113
12	0,584	0,228
13	0,750	0,392
14	0,874	0,584
15	0,949	0,762
16	0,984	0,893
17	0,996	0,965
…		

- Standpunkt des Arztes: Das neue Medikament ist nicht besser, d. h. es gilt $p_1 = 0{,}6$; von diesem Standpunkt gehe ich nur ab, wenn in der Stichprobe besonders viele Heilungen auftreten, beispielsweise mehr als 14 Heilungen, also A = {0, 1, …, 14} und V = {15, 16, …, 20}.
  Dann ist in zwei Fällen eine Fehlentscheidung möglich:
  Fehler 1. Art: Das neue Medikament ist tatsächlich nicht besser, aber zufällig treten mehr als 14 Heilungen auf; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $P_{p1 = 0,6}(X > 14) = 1 - P_{p1 = 0,6}(X \le 14) = 1 - 0{,}874 = 0{,}126$.
  Fehler 2. Art: Das neue Medikament ist tatsächlich besser, aber zufällig treten 14 oder weniger Heilungen auf; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $P_{p2 = 0,7}(X \le 14) = 0{,}584$.
- Standpunkt des Pharmavertreters: Das neue Medikament ist besser, d. h. es gilt $p_2 = 0{,}8$; von diesem Standpunkt gehe ich nur ab, wenn in der Stichprobe besonders wenige Heilungen auftreten, beispielsweise weniger als 12 Heilungen, also A = {12, 13, …, 20} und V = {0, 1, …, 11}.
  Dann ist in zwei Fällen eine Fehlentscheidung möglich:
  Fehler 1. Art: Das neue Medikament ist tatsächlich besser, aber zufällig treten weniger als 12 Heilungen auf; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $P_{p2 = 0,8}(X < 12) = 0{,}113$.
  Fehler 2. Art: Das neue Medikament ist tatsächlich nicht besser, aber zufällig treten 12 oder mehr Heilungen auf; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist
  $P_{p1 = 0,6}(X \ge 12) = 1 - P_{p1 = 0,6}(X \le 11) = 1 - 0{,}404 = 0{,}596$

10. n = 10: $P_{0,25}(X > 5) = 0{,}020$; $P_{0,75}(X \le 5) = 0{,}078$

n = 20: $P_{0,25}(X > 10) = 0{,}004$; $P_{0,75}(X \le 10) = 0{,}014$

n = 50: $P_{0,25}(X > 25) = 0{,}000$; $P_{0,75}(X \le 25) = 0{,}000$

n = 100: $P_{0,25}(X > 50) = 0{,}000$; $P_{0,75}(X \le 50) = 0{,}000$

114

11. n = 10: $P_{0,5}(X > 5) = 0{,}377$; $P_{0,6}(X \leq 5) = 0{,}367$

n = 20: $P_{0,5}(X > 11) = 0{,}252$; $P_{0,6}(X \leq 11) = 0{,}404$

n = 50: $P_{0,5}(X > 27) = 0{,}240$; $P_{0,6}(X \leq 27) = 0{,}234$

n = 100: $P_{0,5}(X > 55) = 0{,}136$; $P_{0,6}(X > 55) = 0{,}136$

12.

Kritischer Wert k	$\alpha = P_{0,1}(X > k)$	$\beta = P_{\frac{1}{6}}(X \leq k)$
9,5	0,549	0,021
10,5	0,417	0,043
11,5	0,297	0,078
12,5	0,198	0,130
13,5	0,124	0,200
14,5	0,073	0,287
15,5	0,040	0,388
16,5	0,021	0,494
17,5	0,010	0,599

13. **a)** *Fehler 1. Art:* Es sind tatsächlich nur 4 Gewinnfelder auf dem Glücksrad, aber in der Stichprobe zufällig eine besonders große Zahl roter Felder. Daher wird p = 0,2 verworfen, obwohl der Betreiber des Spielautomaten ein Betrüger ist.
Fehler 2. Art: Es sind tatsächlich 6 Gewinnfelder auf dem Glücksrad Aber zufällig erscheint nur eine kleine Zahl von roten Feldern in der Stichprobe, sodass wir keinen Anlass haben, die Hypothese p = 0,2 zu verwerfen.

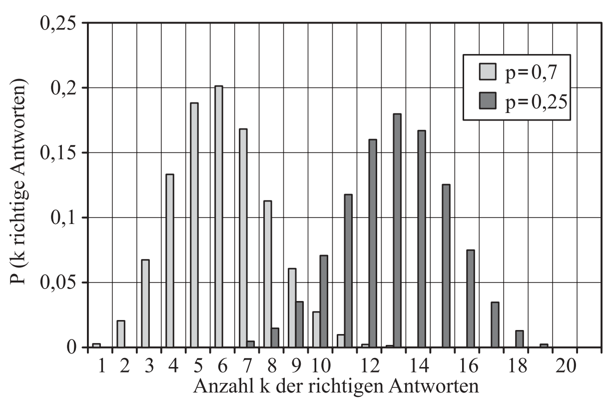
b) $\alpha = P_{0,2}(X > 4) = 0{,}370$

$\beta = P_{0,3}(X \leq 4) = 0{,}238$

c) $\alpha = P_{0,2}(X > 5) = 0{,}196$

$\beta = P_{0,3}(X \leq 5) = 0{,}416$

14. **a)**



Die Grafik zeigt, dass man annehmen kann, dass der Kandidat über eine gute Allgemeinbildung verfügt, wenn er mindestens 10 Fragen richtig beantwortet.

114

14. **b)** Jemand beantwortet durch Raten mehr als 9 Fragen richtig, oder jemand mit einer guten Allgemeinbildung beantwortet weniger als 10 Fragen richtig.

15. **a)** Alternativen:
(1) Die Trefferwahrscheinlichkeit des Kandidaten ist 0,75.
(2) Die Trefferwahrscheinlichkeit ist 0,5.
Standpunkt: $p = 0{,}75$ gilt, wenn 13 von 20 Vorhersagen richtig sind.

b) Fehler 1. Art: Kandidat schafft höchstens 13 richtige Ergebnisse, obwohl er es in 75% der Fälle richtig voraussagen kann.
$\alpha = \text{binomcdf}(20;\, 0{,}75;\, 13) = 0{,}214$
Fehler 2. Art: Kandidat schafft mehr als 13 Treffer durch blindes Raten.
$\beta = 1 - \text{binomcdf}(20;\, 0{,}5;\, 13) = 0{,}058$

c) Der Kandidat behauptet, hellseherisch begabt zu sein, wenn er mindestens 15 Treffer bei 20 Würfen erzielt.
Fehler 1. Art: Obwohl der Kandidat hellseherisch begabt ist, schafft er höchstens 14 Treffer.
$\alpha = \text{binomcdf}(20;\, 0{,}75;\, 14) = 0{,}38$
Fehler 2. Art: Durch Raten schafft er mindestens 15 Treffer:
$\beta = 1 - \text{binomcdf}(20;\, 0{,}5;\, 14) = 0{,}02$

2.2.2 Entscheidungsregel bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit

117

2. Gemäß Aufgabenstellung geht es hier um die Frage, ob das Feld ohne Augen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0{,}3$ oder $p_2 = 0{,}4$ auftritt. Die Zufallsgröße X zählt also die Anzahl der Würfe, bei denen ein Feld ohne Augen oben liegen bleibt.
Der Spieler nimmt einen skeptischen Standpunkt ein, d. h. vermutet, dass $p_2 = 0{,}4$ ist. Von diesem Standpunkt lässt er sich nur abbringen, falls ein Feld ohne Augen ungewöhnlich selten auftritt.
Bei $n = 80$ Würfen kann man $\mu_2 = 80 \cdot 0{,}4 = 32$ Würfe mit 0 Augen erwarten. Außerdem gilt:
$P(X \leq 27) = 0{,}152$ $\quad P(X \leq 26) = 0{,}104$ $\quad P(X \leq 25) = 0{,}067$
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese H_2: $p_2 = 0{,}4$, falls weniger als 26-mal ein Feld ohne Augen oben liegt, d. h. der Annahmebereich ist $A = \{26, 27, 28, \ldots, 80\}$, der Verwerfungsbereich ist $V = \{0, 1, \ldots, 25\}$.
[Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist dann $P_{p1\,=\,0,3}(X \geq 26) = 0{,}352$.]

117

3. a) Hypothese: $p = 0,5$

$P_{0,5}(X \geq 31) = 0,059 > 0,05$; $P_{0,5}(X \geq 32) = 0,032 < 0,05$

Verwirf $p = 0,5$, falls mindestens 32 Erfolge auftreten.

Hypothese: $p = 0,6$

$P_{0,6}(X \leq 23) = 0,031 > 0,05$; $P_{0,6}(X \leq 24) = 0,057 < 0,05$

Verwirf $p = 0,6$, falls höchstens 23 Erfolge auftreten.

Verwirf $p = \frac{1}{3}$, falls weniger als 11 [12] Erfolge auftreten.

b) Hypothese: $p = 0,4$

$P_{0,4}(X \geq 48) = 0,064 > 0,05$; $P_{0,4}(X \geq 49) = 0,042 \leq 0,05$

Verwirf $p = 0,4$, falls mindestens 49 Erfolge auftreten.

Hypothese: $p = 0,6$

$P_{0,6}(X \leq 51) = 0,042 \leq 0,05$; $P_{0,6}(X \leq 52) = 0,064 > 0,05$

Verwirf $p = 0,6$, falls höchstens 51 Erfolge auftreten.

c) Hypothese: $p = 0,25$

$P_{0,25}(X \geq 32) = 0,070 > 0,05$; $P_{0,25}(X \geq 33) = 0,045 \leq 0,05$

Verwirf $p = 0,25$, falls mindestens 33 Erfolge auftreten.

Hypothese: $p = 0,75$

$P_{0,75}(X \leq 67) = 0,045 \leq 0,05$; $P_{0,75}(X \leq 68) = 0,070 > 0,05$

Verwirf $p = 0,75$, falls höchstens 67 Erfolge auftreten.

d) Hypothese: $p = \frac{1}{6}$

$P_{\frac{1}{6}}(X \geq 13) = 0,063 > 0,05$; $P_{\frac{1}{6}}(X \geq 14) = 0,031 \leq 0,05$

Verwirf $p = \frac{1}{6}$, falls mindestens 14 Erfolge auftreten.

Hypothese: $p = \frac{1}{3}$

$P_{\frac{1}{3}}(X \leq 10) = 0,028 \leq 0,05$; $P_{\frac{1}{3}}(X \leq 11) = 0,057 > 0,05$

Verwirf $p = \frac{1}{3}$, falls höchstens 10 Erfolge auftreten.

5. $P_{0,9}(X \leq 84) = 0,040 < \alpha$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p = 0,9$, falls weniger als 85 Pflanzen keimen.
Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art:
$\beta = P_{0,75}(X > 84) = 1 - P_{0,75}(X \leq 84) = 0,011$

$P_{0,75}(X \geq 83) = 0,038 < \alpha$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p = 0,75$, falls mehr als 82 Pflanzen keimen.
Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art:
$\beta = P_{0,9}(X \leq 82) = 0,010$

117 **5.** Fortsetzung

$P_{\frac{1}{6}}(X \leq 11) = 0{,}078 < 0{,}1$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p = \frac{1}{6}$, falls weniger als 12-mal Augenzahl 6 fällt.

Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art:

$\beta = P_{0,1}(X > 11) = 1 - P_{0,1}(X \leq 11) = 0{,}297$

$P_{0,1}(X \leq 15) = 0{,}073 < 0{,}1$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese p = 0,1, falls mehr als 14-mal Augenzahl 6 fällt.

Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art:

$\beta = P_{\frac{1}{6}}(X \leq 14) = 0{,}287$

2.3 Signifikanztest

2.3.1 Testen einer zweiseitigen Hypothese

119 **2.** Wir betrachten die Zufallsgröße X: Anzahl der Würfe, bei denen eine dreieckige Fläche oben liegt.

Naheliegend ist es zunächst einmal, die Hypothese p = 0,366 zu testen, da dies dem Oberflächen-Anteil entspricht; dann werden wir systematisch den Wert für das hypothetische p verändern und sehen, ob das angegebene Stichprobenergebnis zu einem Verwerfen der Hypothese führt oder nicht.

p	μ	σ	$\mu - 1{,}96\sigma$	$\mu + 1{,}96\sigma$	Kommentar
0,366	183	10,77	161,89	204,11	signifikant nach unten abweichend
0,30	150	10,25	129,92	170,08	signifikant nach unten abweichend
0,28	140	10,04	120,32	159,68	signifikant nach unten abweichend
0,27	135	9,93	115,54	154,46	Liegt im Annahmebereich
0,20	100	8,94	82,47	117,53	liegt im Annahmebereich
0,19	95	8,77	77,81	112,19	signifikant nach oben abweichend
0,18	90	8,59	73,16	106,84	signifikant nach oben abweichend

Man stellt fest: Bei einem Signifikanzniveau von 5% werden Hypothesen mit p < 0,2 bzw. p > 0,27 aufgrund des Stichprobenergebnisses von X = 116 verworfen.

3. Im 95%-Konfidenzintervall liegen alle diejenigen Erfolgswahrscheinlichkeiten p, für die gilt:

Das gegebene Stichprobenergebnis X liegt in der 95%-Umgebung des Erwartungswerts $\mu = n \cdot p$; die Hypothese bzgl. p würde also nicht verworfen.

Liegt ein p nicht im 95%-Konfidenzintervall, dann liegt auch das Stichprobenergebnis X nicht in der 95%-Umgebung von μ; die Hypothese bzgl. p würde also verworfen.

120 **4.** **a)** $p = \frac{1}{6}$; $n = 600$; X: Anzahl der Einsen;

$\mu = 100$; $\sigma = 9{,}13$; $1{,}64\sigma = 14{,}97$

Entscheidungsregel: Verwirf $p = \frac{1}{6}$, falls $X < 85$ oder $X > 115$

b) Aufgrund des Versuchsergebnisses $X = 121$ verwerfen wir die Hypothese $p = \frac{1}{6}$. D. h. wir sehen die Hypothese $p \neq \frac{1}{6}$ als wahr an.

c) Das Ergebnis ist verträglich mit der Hypothese $p = \frac{1}{6}$. Es kann aber die Hypothese nicht bestätigen, denn das Ergebnis ist auch mit anderen Werten für p verträglich (z. B. mit $p = 0{,}15$ der Annahmebereich $76 \leq X \leq 104$).

121 **5.** (1) $\mu - 1{,}96\sigma = 30{,}40$; $\mu + 1{,}96\sigma = 49{,}60$, d. h. der Annahmebereich lautet $A = \{30, \ldots, 50\}$

(2) Exakte Rechnung mit Binomialverteilung bestätigt:
$P(30 \leq X \leq 50) = 0{,}968$. $P(31 \leq X \leq 49) = 0{,}948$ ist zu klein.

6. **a)** $p = 0{,}3$; $n = 180$; $\mu = 54$ Annahmebereich: $42 \leq X \leq 66$
$p = 0{,}7$; $n = 345$; $\mu = 241{,}5$ Annahmebereich: $225 \leq X \leq 259$

b) $p = 0{,}3$; $n = 180$; $\mu = 54$ Annahmebereich: $40 \leq X \leq 68$
$p = 0{,}7$; $n = 345$; $\mu = 241{,}5$ Annahmebereich: $222 \leq X \leq 262$

c) $p = 0{,}3$; $n = 180$; $\mu = 54$ Annahmebereich: $38 \leq X \leq 70$
$p = 0{,}7$; $n = 345$; $\mu = 241{,}5$ Annahmebereich: $220 \leq X \leq 260$

7. Getestet wird die Hypothese „Die Form des Schuhs spielt keine Rolle“, d. h. linke oder rechte Schuhe werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit am Strand gefunden.
Wir betrachten die Zufallsgröße X: *Anzahl der linken Schuhe in der Stichprobe* und testen die Hypothese $p = 0{,}5$.
Holland: $n = 107$; $\mu = 53{,}5$; $\sigma = 10{,}14$. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % ergibt sich der Annahmebereich $44 \leq X \leq 64$. Damit wird die Hypothese verworfen.
Schottland: $n = 156$; $\mu = 78$; $\sigma = 12{,}24$. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % ergibt sich der Annahmebereich $66 \leq X \leq 90$. Damit wird die Hypothese verworfen.

8. Teste die Hypothese H: $p = \frac{1}{6}$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 5$ %

a) $\mu = 247{,}5$; A: $219 \leq X \leq 276$ **d)** $\mu = 1131{,}83$; A: $1072 \leq X \leq 1192$
b) $\mu = 502{,}5$; A: $462 \leq X \leq 543$ **e)** $\mu = 1691{,}67$; A: $1618 \leq X \leq 1765$
c) $\mu = 828{,}67$; A: $778 \leq X \leq 880$ **f)** $\mu = 2605{,}17$; A: $2514 \leq X \leq 2696$

Nur in d) liegt das Ergebnis nicht im Annahmebereich; hier wird man die Hypothese verwerfen.

121

9. $n = 449$; $p = \frac{1\,774}{5\,239}$; $\mu = 152{,}04$; $\sigma = 10{,}03$

Annahmebereich für $p = \frac{1\,774}{5\,239}$: $133 \leq X \leq 171$

Falls weniger als 133 oder mehr als 171 Fahrzeuge des betreffenden Herstellers angemeldet werden, wird man $p = \frac{1\,774}{5\,239}$ (d. h. der Anteil bleibt gleich) verwerfen. Dann geht man also davon aus, dass sich der Anteil geändert hat.

10. Wir betrachten die Zufallsgröße X: *Anzahl der verwandelten Elfmeter*. Wenn es keine Rolle spielt, ob der Elfmeterschütze derjenige war, der gefoult worden ist, dann würde also auch $p = 0{,}75$ gelten – wir testen also die Hypothese $p = 0{,}75$.
Für $n = 102$ ist $\mu = 76{,}5$ und $\sigma \approx 8{,}57$ und es ergibt sich ein Annahmebereich von $68 \leq X \leq 85$ für $\alpha \leq 0{,}05$.

122

11. $n = 1000$

Bild	Hypothese H: p =	95 %-Umgebung
1 Paar	0,463	[432; 494]
2 Paare	0,2315	[205; 258]
Dreier	0,2315	[132; 177]
anderes Bild	0,1512	[129; 173]

Verwirf die Hypothese, falls bei 1000facher Durchführung die jeweiligen Erfolge im Annahmebereich liegen.

12. **a)** $p = 0{,}2$; $n = 400$; $\mu = 80$; $\sigma = 8$
Annahmebereich: $65 \leq X \leq 95$
Falls weniger als 65 oder mehr als 95 Körner der einen Substanz in der Stichprobe von 400 Körnern gefunden werden, verwirf die Hypothese $p = 0{,}2$.

b) $p = 0{,}2$; $n = 158$; $\mu = 31{,}6$; $\sigma = 5{,}03$
A: $22 \leq X \leq 41$. Die Hypothese $p = 0{,}2$ wird verworfen.
[$p = 0{,}2$; $n = 127$; $\mu = 25{,}4$; $\sigma = 4{,}51$
A: $17 \leq X \leq 34$. Die Hypothese $p = 0{,}2$ kann nicht verworfen werden.]

122

13. Jahr: 2004

Monat	Geburten-zahl	Annahmebereich	Ergebnis
Jan.	60 122	[59 817; 60 738]	im Annahmebereich
Feb.	54 679	[54 004; 54 884]	im Annahmebereich
März	60 393	[59 817; 60 738]	im Annahmebereich
April	56 262	[57 879; 58 787]	unterhalb des Annahmebereichs
Mai	51 757	[59 817; 60 738]	unterhalb des Annahmebereichs
Juni	62 594	[57 879; 58 787]	oberhalb des Annahmebereichs
Juli	63 860	[59 817; 60 738]	oberhalb des Annahmebereichs
Aug.	65 878	[59 817; 60 738]	oberhalb des Annahmebereichs
Sep.	64 067	[57 879; 58 787]	oberhalb des Annahmebereichs
Okt.	56 975	[59 817; 60 738]	unterhalb des Annahmebereichs
Nov.	57 339	[57 879; 58 787]	unterhalb des Annahmebereichs
Dez.	57 736	[59 817; 60 738]	unterhalb des Annahmebereichs

Jahr: 2005

Monat	Geburten-zahl	Annahmebereich	Ergebnis
Jan.	54 912	[57 812; 58 719]	unterhalb des Annahmebereichs
Feb.	52 725	[52 194; 53 059]	im Annahmebereich
März	56 463	[57 812; 58 719]	unterhalb des Annahmebereichs
April	55 749	[55 940; 56 832]	unterhalb des Annahmebereichs
Mai	57 230	[57 812; 58 719]	unterhalb des Annahmebereichs
Juni	59 831	[55 940; 56 832]	oberhalb des Annahmebereichs
Juli	58 118	[57 812; 58 719]	im Annahmebereich
Aug.	64 531	[57 812; 58 719]	oberhalb des Annahmebereichs
Sep.	60 041	[55 940; 56 832]	oberhalb des Annahmebereichs
Okt.	56 216	[57 812; 58 719]	unterhalb des Annahmebereichs
Nov.	55 496	[55 940; 56 832]	unterhalb des Annahmebereichs
Dez.	54 717	[57 812; 58 719]	unterhalb des Annahmebereichs

Jahr: 2006

Monat	Geburten-zahl	Annahmebereich	Ergebnis
Jan.	55 444	[56 701; 57 598]	unterhalb des Annahmebereichs
Feb.	50 969	[51 190; 52 047]	unterhalb des Annahmebereichs
März	56 902	[56 701; 57 598]	im Annahmebereich
April	48 131	[54 864; 55 748]	unterhalb des Annahmebereichs
Mai	60 230	[56 701; 57 598]	oberhalb des Annahmebereichs
Juni	57 294	[54 864; 55 748]	oberhalb des Annahmebereichs
Juli	58 288	[56 701; 57 598]	oberhalb des Annahmebereichs
Aug.	63 751	[56 701; 57 598]	oberhalb des Annahmebereichs
Sep.	58 156	[54 864; 55 748]	oberhalb des Annahmebereichs
Okt.	58 801	[56 701; 57 598]	oberhalb des Annahmebereichs
Nov.	55 407	[54 864; 55 748]	im Annahmebereich
Dez.	49 515	[56 701; 57 598]	unterhalb des Annahmebereichs

122

13. Jahr: 2007

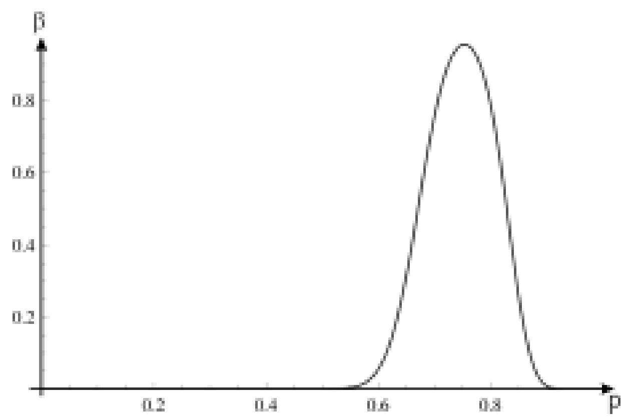
Monat	Geburtenzahl	Annahmebereich	Ergebnis
Jan.	58 857	[57 532; 58 436]	oberhalb des Annahmebereichs
Feb.	51 305	[51 941; 52 804]	unterhalb des Annahmebereichs
März	55 634	[57 532; 58436]	unterhalb des Annahmebereichs
April	51 153	[55 668; 56 559]	unterhalb des Annahmebereichs
Mai	56 627	[57 532; 58 436]	unterhalb des Annahmebereichs
Juni	56 793	[55 668; 56 559]	oberhalb des Annahmebereichs
Juli	62 634	[57 532; 58 436]	oberhalb des Annahmebereichs
Aug.	63 788	[57 532; 58 436]	oberhalb des Annahmebereichs
Sep.	57 361	[55 668; 56 559]	oberhalb des Annahmebereichs
Okt.	64 572	[57 532; 58 436]	oberhalb des Annahmebereichs
Nov.	55 626	[55 668; 56 559]	unterhalb des Annahmebereichs
Dez.	48 363	[57 532; 58 436]	unterhalb des Annahmebereichs

2.3.2 Wahrscheinlichkeiten für Fehler beim Testen von Hypothesen

124

2. **a)** (1) $\beta = 0{,}319$; $\beta = 0{,}055$; $\beta = 0{,}004$; $\beta = 0{,}000079$
(2) $\beta = 0{,}785$; $\beta = 0{,}256$; $\beta = 0{,}008$; $\beta = 0{,}0000005$

b) Man kann sich β als Funktion β: $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ vorstellen.



125

3. **a)** $\alpha = 1 - P_{0,5}(45 \le X \le 55) = 0{,}271$ numerisch. Das ergibt $p = 0{,}416$ und $p = 0{,}584$.

4. Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese, falls weniger als 42 oder mehr als 60 Erfolge eintreten.
$\beta = P_{0,2}(42 \le X \le 60) = 0{,}0778$

5. **a)** Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese, falls weniger als 31 oder mehr als 49 Erfolge eintreten.

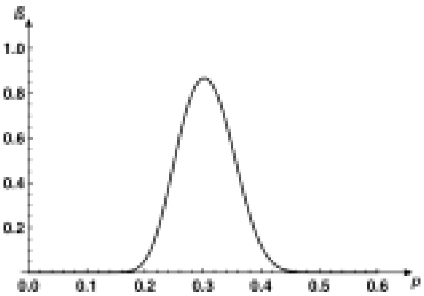
b) $\beta = P_{\frac{1}{5}}(31 \le X \le 49) = 0{,}600$

125

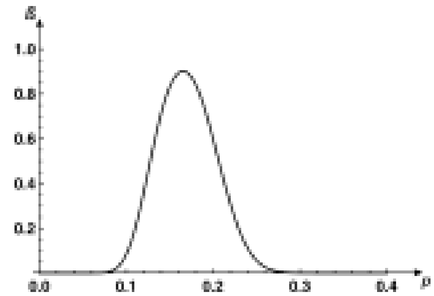
5. **c)** Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese, falls weniger als 86 oder mehr als 114 Erfolge eintreten.

$\beta = P_{\frac{1}{5}}(86 \le X \le 114) = 0{,}290$

6. (1)



(2)



7. **a)** $\alpha = 0{,}05;\ p_0 = 0{,}75$

(ablesbar am Maximum der Operationscharakteristik)

Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art (exakte Werte):

$p_1 = 0{,}66;\ \beta = 0{,}231$ [$p_1 = 0{,}72;\ \beta = 0{,}843$ $p_1 = 0{,}8;\ \beta = 0{,}674$]

b) $\alpha = 0{,}10;\ p_0 = 0{,}4$

Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art (exakte Werte):

$p_1 = 0{,}36;\ \beta = 0{,}748$ [$p_1 = 0{,}42;\ \beta = 0{,}857$ $p_1 = 0{,}5;\ \beta = 0{,}223$]

8. Wenn der Stichprobenumfang n verdoppelt wird, wird der Annahmebereich nicht doppelt so groß, sondern wächst nur mit dem Faktor $\sqrt{2}$, da bei der Bestimmung der zugehörigen Umgebung um den Erwartungswert die Standardabweichung eine Rolle spielt, welche sich nach der Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ berechnet.

Andererseits verändert sich der Erwartungswert bei Verdoppelung des Stichprobenumfangs mit dem Faktor 2, d. h. der Abstand zwischen dem Erwartungswert des hypothetischen p und dem des tatsächlichen p wird größer, sodass die Wahrscheinlichkeit für den Annahmebereich mit größer werdendem n wegen der größeren Entfernung des Annahmebereichs vom tatsächlichen Erwartungswert kleiner wird.

Konkret ergibt sich für n = 100; p = 0,5 und $\alpha \le 0{,}05$ der Annahmebereich A = {40, 41, …, 60} und für n = 200 entsprechend A = {86, 87, …, 114}.

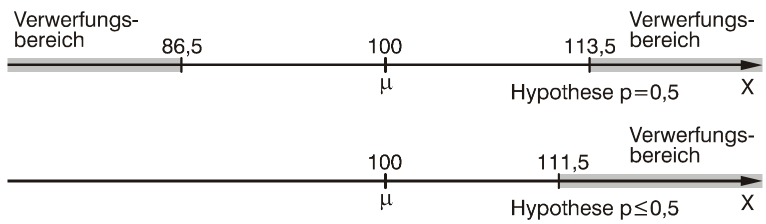
p	OC(p) für n = 100	OC(p) für n = 200
0,2	$3{,}608 \cdot 10^{-6}$	$1{,}313 \cdot 10^{-13}$
0,3	0,021	$6{,}705 \cdot 10^{-5}$
0,4	0,538	0,213
0,6	0,538	0,213
0,7	0,021	$6{,}705 \cdot 10^{-5}$
0,8	$3{,}608 \cdot 10^{-6}$	$1{,}313 \cdot 10^{-13}$

2.3.3 Testen einer einseitigen Hypothese

127

2. **a)** X: Anzahl der Wappen; $n = 200$; getestet wird die Hypothese $p \leq 0{,}5$. Falls diese Hypothese verworfen werden kann, gilt: $p > 0{,}5$ – was vermutet wird!
Für $p = 0{,}5$ ist $\mu = 100$; $\sigma = 7{,}07$; also $\mu + 1{,}64\sigma = 111{,}60$
Für $p < 0{,}5$ ist $\mu + 1{,}64\sigma < 111{,}60$
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p \leq 0{,}5$, falls mehr als 111-mal Wappen fällt.

b) Beim zweiseitigen Hypothesentest ($p = 0{,}5$) setzt sich der Verwerfungsbereich aus 2 Teilbereichen zusammen ($X < \mu - 1{,}96\sigma$ bzw. $X > \mu + 1{,}96\sigma$). Der Annahmebereich zum selben Signifikanzniveau ragt weiter nach „oben" als der der einseitigen Hypothese $p \leq 0{,}5$.



129

3. Wenn man die Behauptung des Lkw-Herstellers ($p > 0{,}5$) bestätigen will, muss man die Hypothese $p \leq 0{,}5$ testen und prüfen, ob sie verworfen werden kann:
Für $n = 59$; $p = 0{,}5$ ist $\mu = 29{,}5$; $\sigma = 3{,}84$; $\mu + 1{,}64\sigma = 35{,}80$.
Für $p < 0{,}5$ ist $\mu + 1{,}64\sigma < 35{,}80$ $\quad(\alpha = 0{,}05)$.
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p \leq 0{,}5$, falls mehr als 35 Lkw der betreffenden Firma in der Stichprobe erfasst werden.
Aufgrund des Stichprobenergebnisses kann die Hypothese $p \leq 0{,}5$ verworfen werden. Die Behauptung ist damit allerdings nicht **bewiesen**; es kann mit Wahrscheinlichkeit 5 % auch zufällig zu signifikanten Abweichungen nach oben kommen.

4. Lässt sich die Hypothese $p > 0{,}5$ aufgrund des Stichprobenergebnisses verwerfen?
Für $p = 0{,}5$; $n = 800$ wäre $\mu = 400$; $\sigma = 14{,}14$ und $\mu - 1{,}64\sigma = 376{,}81$.
Für $p > 0{,}5$ ist $\mu - 1{,}64\sigma > 376{,}81$.
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p > 0{,}5$, falls weniger als 377 Personen in der Stichprobe die Regierung unterstützen würden.
Da in der Stichprobe 382 Personen wieder die Regierungspartei wählen würden, kann man nichts über die Hypothese entscheiden.

129

5. a)

Partei	$1{,}96\frac{\sigma}{n}$ -Umgebung des Wahlergebnisses
CDU	$0{,}440 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}480$
SPD	$0{,}423 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}463$
FDP	$0{,}056 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}076$

Die Befragungsergebnisse liegen alle in den $1{,}96\frac{\sigma}{n}$ -Umgebungen der Wahlergebnisse.

b) Einseitiger Hypothesentest: $H_0 : p \leq 0{,}53$
Für $p = 0{,}53$ gilt $\mu + 1{,}96\sigma = 560{,}93$;
für alle $p < 0{,}53$ gilt $\mu + 1{,}96\sigma < 560{,}93$.
$X = 565$ liegt im Verwerfungsbereich von H_0. Die Hypothese H_0 „Personen sind bereit zuzugeben, die Verliererpartei gewählt zu haben“, kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5% verworfen werden.

7. a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine mindestens 65-jährige Person in 7 Jahren an Alzheimer erkrankt, beträgt $\frac{111}{800} = 0{,}13875$.

Von diesen Erkrankten handelt es sich nach den Ergebnissen der Studie zu $\frac{1}{3}$ um geistig rege und $\frac{2}{3}$ weniger aktive. Zu Beginn bestand die Stichprobe aus 400 geistig regen und 400 weniger aktiven. Der Anteil der geistig Regen, aber dennoch an Alzheimer erkrankten Personen ist folglich $\frac{1}{3} \cdot \frac{111}{400} = 0{,}0925$,

der Anteil der weniger Aktiven $\frac{2}{3} \cdot \frac{111}{400} = 0{,}185$.

b) Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein geistig Aktiver in den nächsten 7 Jahren an Alzheimer erkrankt. Der Verdacht ist die Hypothese H_1 : $p < \frac{111}{800}$. Wir testen also die Hypothese $H_0 : p \geq \frac{111}{800}$.

X sei die Anzahl der in 7 Jahren an Alzheimer Erkrankten in der Stichprobe vom Umfang n= 400 .

Wegen $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{111}{800} \cdot \left(1 - \frac{111}{800}\right)} \approx 6{,}914 > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt. In 95 % aller Fälle gilt für den Anteil der in 7 Jahren an Alzheimer Erkrankten

$$\frac{X}{n} \geq \frac{11}{800} - 1{,}64 \cdot \frac{6{,}914}{400} \approx 0{,}1104 .$$

0,0925 liegt nicht im Annahmebereich dieser Hypothese H_0, die somit verworfen werden kann, d.h. der Verdacht, dass der Anteil der an Alzheimer Erkrankten bei geistig Aktiven geringer ist, ist somit bestätigt. Möglich ist bei dieser Schlussfolgerung ein Fehler 1. Art: Obwohl die Wahrscheinlichkeit für geistig Aktive, an Alzheimer zu erkranken, mindestens $\frac{111}{800}$ beträgt, enthält die betrachtete Stichprobe zufällig besonders wenige. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Fehler beträgt 5 %.

129 **7. c)** Die Behauptung „Geistiges Fitnesstraining schützt vor Alzheimer" trifft eine Aussage über eine kausale Abhängigkeit - solche sind statistisch nicht beweisbar. Es könnte z.B. auch sein, dass später an Alzheimer Erkrankte kurz vor der Erkrankung oder im Frühstadium geistige Beschäftigung meiden.

2.3.4 Auswahl der Hypothese bei einseitigen Tests

131 **2.** I. Behauptung des Herstellers: $p \leq 0{,}1$ (Wahrscheinlichkeit für allergische Reaktion); diese kann nur bei signifikanter Abweichung nach oben verworfen werden.

II. Skeptischer Standpunkt: $p > 0{,}1$; dieser wird bei signifikanter Abweichung nach unten aufgegeben.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art sollte klein gehalten werden, z. B. $\alpha = 0{,}01$

I. Für $p = 0{,}1$ ist $\mu = 17{,}2$; $\sigma = 3{,}93$; also $\mu + 2{,}33\sigma = 26{,}37$.
Für $p < 0{,}1$ ist $\mu + 2{,}33\sigma < 26{,}37$.
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p \leq 0{,}1$, falls mehr als 26 Patienten allergische Reaktionen zeigen.

II. Für $p > 0{,}1$ ist $\mu - 2{,}33\sigma > 8{,}03$.
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p > 0{,}1$, falls weniger als 9 Patienten allergische Reaktionen zeigen.

I. Fehler 1. Art: Ein besseres Medikament wird irrtümlich nicht eingesetzt.
Fehler 2. Art: Ein schlechteres Medikament wird irrtümlich als besser eingestuft.

II. Auswirkungen des Fehlers 1. und 2. Art von I sind vertauscht.

3. $H_0 : p \geq 0{,}7$ oder $H_1 : p < 0{,}7$
Der Auftraggeber wird H_1 testen.
Für $p = 0{,}7$ und $n = 500$ gilt: $\mu = 350$; $\sigma = 10{,}25$
$\mu - 1{,}64\sigma = 333{,}20$; $\mu + 1{,}64\sigma = 366{,}80$
$H_0 : p \geq 0{,}7$: Die Hypothese wird verworfen, wenn weniger als 334 Personen den Artikel kennen.
$H_1 : p < 0{,}7$:Die Hypothese wird verworfen, wenn mehr als 366 Personen den Artikel kennen.
Für H_0 liegt ein Fehler 1. Art vor, wenn weniger als 334 Personen in der Stichprobe den Artikel kennen, obwohl $p \geq 0{,}7$ ist.
Für H_1 liegt ein Fehler 1. Art vor, wenn mehr als 366 Personen in der Stichprobe den Artikel kennen, obwohl $p < 0{,}7$ ist.
Für H_0 liegt ein Fehler 2. Art vor, wenn mehr als 333 Personen in der Stichprobe den Artikel kennen, obwohl $p < 0{,}7$ ist.
Für H_1 liegt ein Fehler 2. Art vor, wenn weniger als 367 Personen in der Stichprobe den Artikel kennen, obwohl $p \geq 0{,}7$ ist.

4. Der Hersteller wird i. a. nur von seinen Angaben zurücktreten, wenn bei einer Stichprobe signifikant weniger als 90% der Fälle behandelbar sind.

131 **5. a)** Der Händler wird einen skeptischen Standpunkt einnehmen, d. h. die Hypothese $p \leq 0{,}7$ (Anteil der brauchbaren Glühbirnen) testen.
Diese Hypothese wird verworfen bei signifikanter Abweichung nach oben.
Für $p \leq 0{,}7$ und $n = 60$ ist $\mu = 42$; $\sigma = 3{,}55$; also $\mu + 1{,}28\sigma \leq 46{,}54$. Der Händler wird erst bei mehr als 46 brauchbaren (d. h. weniger als 14 unbrauchbaren) Glühbirnen kaufen.

b) Alle Anteile $0{,}685 \leq p < 0{,}7$ sind mit $X = 47$ verträglich, aber für den Händler ungünstig.

c) Alle Anteile $0{,}7 < p \leq 0{,}728$ sind mit $X = 38$ verträglich, aber für den Händler günstig.

132 **6. a)** Standpunkt des Kunden: Der Anteil ist geringer als 20% ($p < 0{,}2$)
Für $p = 0{,}2$ ist $\mu = 14{,}4$; $\sigma = 3{,}39$; also $\mu + 1{,}28\sigma = 18{,}74$
Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese $p < 0{,}2$, falls unter den 72 sichtbaren Briefmarken mehr als 18 einen Katalogwert von mindestens 0,30 DM heben.

b) Bei nur 10 Briefmarken mit Mindest-Katalogwert 0,30 DM kauft der Kunde nicht (vgl. a). Es ist jedoch dennoch möglich, dass $p \geq 0{,}2$ ist. Selbst ein Stichprobenergebnis von $X = 10$ ist mit Anteilen $0{,}2 \leq p \leq 0{,}219$ verträglich!

c) Der Anbieter wird die Hypothese $p \geq 0{,}2$ vorschlagen, die nur bei signifikanter Abweichung nach unten ($X < 11$) verworfen wird.
Fehler 1. Art: Die Briefmarken haben tatsächlich einen höheren Wert, aber die Stichprobe führt zum Verwerfen der Hypothese.
Fehler 2. Art: Die Briefmarken sind nicht so wertvoll, aber dies wird nicht erkannt.

7. a) Da im Großmarkt untersucht wird, wird die Hypothese $H_0 : p \leq 0{,}1$ getestet.
Für $p = 0{,}1$ gilt: $\mu = 10$; $\sigma = 3$; $1{,}64\sigma = 4{,}92$
Entscheidungsregel: Falls mehr als 14 Packungen weniger als 400 g wiegen, verwirf die Hypothese H_0.

b) Da der Test beim Abnehmer stattfindet, wird folgende Hypothese untersucht: $H_1 : p > 0{,}1$ (Rechnung wie in a)) $1{,}64\sigma = 5{,}39$
Entscheidungsregel: Falls weniger als 7 Packungen Mindergewicht haben, verwirf die Hypothese H_1.

c) Für H_0 gilt: Ein Fehler 1. Art tritt auf, wenn mehr als 14 Packungen Mindergewicht haben, obwohl $p \leq 0{,}1$ ist.
Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn weniger als 15 Packungen Mindergewicht haben, obwohl $p > 0{,}1$ ist.
Für H_1 gilt: Ein Fehler 1. Art tritt auf, wenn weniger als 7 Packungen Mindergewicht haben, obwohl $p > 0{,}1$ ist.
Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn mehr als 6 Packungen Mindergewicht haben, obwohl $p \leq 0{,}1$ ist.

132

8. Annahmebereich aus b): $X \leq 65$

$P_{0,85}\ (X \leq 65) = P_{0,85}\ (X \leq 65{,}5) = P\ (X \leq \mu + 0{,}57\sigma) = 0{,}716$

Denn: Für $p = 0{,}85$ ist $\mu = 63{,}75$; $\sigma = 3{,}09$

$P\ (\mu - 0{,}57\sigma \leq X \leq \mu + 0{,}57\sigma) = 0{,}431$; also $P\ (\mu \leq X \leq \mu + 0{,}57\sigma) = 0{,}216$.

9. **a)** Hypothese H_1: $p < 0{,}05$

Von seiner Meinung lässt sich der Wahlkampfmanager nur abbringen, wenn in der Stichprobe ein extrem hohes Ergebnis für die Partei herauskommt – extrem hoch heißt: Werte oberhalb von $\mu + 1{,}64\sigma$ für $p = 0{,}05$ – diese führen dann zum Verwerfen der Hypothese $p < 0{,}05$, denn solche Werte treten zufällig nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % auf.

$n = 400$; $p = 0{,}05$; $\mu = 400 \cdot 0{,}05 = 20$; $\sigma \approx 4{,}87$; $\mu + 1{,}64\sigma \approx 28{,}0$

Kontrollrechnung: $P(X \leq 28) \approx 0{,}969$, aber $P(X \leq 27) \approx 0{,}952$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese H_1: $p < 0{,}05$, falls in der Stichprobe vom Umfang 400 mehr als 27 Personen angeben, die Partei wählen zu wollen.

b) Hypothese H_2: $p \geq 0{,}05$

Von dieser Meinung lässt sich der Finanzbeauftragte nur abbringen, wenn in der Stichprobe ein extrem niedriges Ergebnis für die Partei herauskommt – extrem niedrig heißt: Werte unterhalb von $\mu - 1{,}64\sigma$ für $p = 0{,}05$ – diese führen dann zum Verwerfen der Hypothese $p \geq 0{,}05$; denn solche Werte treten zufällig nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % auf.

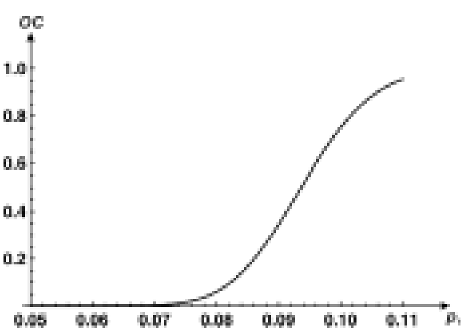
$n = 400$; $p = 0{,}05$;$\mu = 400 \cdot 0{,}05 = 20$; $\sigma \approx 4{,}87$; $\mu - 1{,}64\sigma \approx 12{,}0$

Kontrollrechnung: $P(X \leq 12) \approx 0{,}036$, aber $P(X \leq 13) \approx 0{,}061$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese H_2: $p > 0{,}05$, falls in der Stichprobe vom Umfang 400 weniger als 13 Personen angeben, die Partei wählen zu wollen.

10. **a)/b)**

p	OC(p)
0,1	0,751
0,095	0,559
0,09	0,345
0,085	0,167
0,08	0,060
0,075	0,015
0,07	0,003
0,065	0,0003



133

11. (1) Das Programm simuliert einen 100-stufigen Bernoulli-Versuch mit $p = 0{,}3$. Es sind dann (zumindest theoretisch) relative Häufigkeiten $\frac{X}{n} = 0; 0{,}01; 0{,}02; \ldots; 0{,}99; 1$ möglich.

Zu diesen relativen Häufigkeiten bestimmt die Software ein Konfidenzintervall. Wenn das wahre p (das wir kennen), innerhalb des berechneten Konfidenzintervalls liegt, wird das Intervall grün gefärbt, sonst rot.
Da der Ansatz zur Bestimmung eines 90 %-Konfidenzintervalls nur in 90 % der Fälle richtig ist (denn die Ungleichung $|X - \mu| \le 1{,}64\sigma$ gilt in 90 % der Fälle), ist auch zu erwarten, dass ungefähr 90 % der Simulationen zu einem Intervall führen, welches das wahre p enthält, also grün gefärbt ist.

(2) Links ist das Säulendiagramm für $p_0 = 0{,}5$ abgebildet, rechts für $p_1 = 0{,}6$. Dabei sind die Säulen von $p_0 = 0{,}5$ links des kritischen Werts $k = 57$ blau gefärbt (der Annahmebereich der Hypothese p_0 ist also $A = \{0, 1, \ldots, 56\}$) und rechts davon rot (= Verwerfungsbereich der Hypothese p_0).
Die Säulen von $p_1 = 0{,}6$ sind rechts des kritischen Werts (genauer: $X \ge 57$) oliv-grün gefärbt (der Annahmebereich der Hypothese p_1 ist also $A = \{57, 58, \ldots, 100\}$) und links davon orange (= Verwerfungsbereich der Hypothese p_1)
Hieraus ergeben sich die angegebenen Wahrscheinlichkeiten:
$P_{p0=0,5}(X \le 56) = 0{,}90333$
$P_{p0=0,5}(X > 56) = 0{,}09667$ = Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art beim Testen von p_0
$P_{p1=0,6}(X \le 56) = 0{,}23653$ = Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art beim Testen von p_0
$P_{p1=0,6}(X > 56) = 0{,}76347$
Mithilfe der Optionen kann man die farbige Kennzeichnung beim Säulendiagramm bzw. die Kommentierung Annahme-/Verwerfungsbereich bzw. die Entscheidungstabelle ein- und ausschalten.

(3) Die Rechtecke des Histogramms, die zum Verwerfungsbereich der vorgegebenen Hypothese gehören, sind rot gefärbt, also $X \le 17$ oder $X \ge 33$.
Schaltet man die Option „Irrtumswahrscheinlichkeit“ ein, dann werden alle Rechtecke rot eingetragen, die mindestens so weit vom Erwartungswert entfernt liegen wie das Stichprobenergebnis; es wird also die Wahrscheinlichkeit für den Fall angegeben, dass das markierte Stichprobenergebnis zum Verwerfen der Hypothese führen soll.
Die linksseitige Hypothese $p \ge 0{,}25$ (oder $p > 0{,}25$) wird verworfen, wenn $X \le 19$ mit $P(X \le 19) = 0{,}0995$; die rechtsseitige Hypothese $p < 0{,}25$ (oder $p \le 0{,}25$) wird verworfen, wenn $X \ge 32$ mit $P(X \ge 32) = 0{,}0693$.

133

11. (4) Die blau gefärbten Säulen gehören zum Annahmebereich der Hypothese p_0, die rot gefärbten zum Verwerfungsbereich dieser Hypothese. Die Säulen der Verteilung, die zu dem tatsächlichen p gehören, sind grün gefärbt.
Der kritische Bereich ergibt sich aus dem vorgegebenen Signifikanzniveau. Die angezeigte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist gemäß Definition die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Stichprobenergebnis im Annahmebereich der Hypothese p_0 liegt, also überall da, wo grüne und blaue Säulen nebeneinander stehen.
Bei Umschalten auf einseitige Test verändern sich die Lage des Annahme- und des Verwerfungsbereichs und damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.