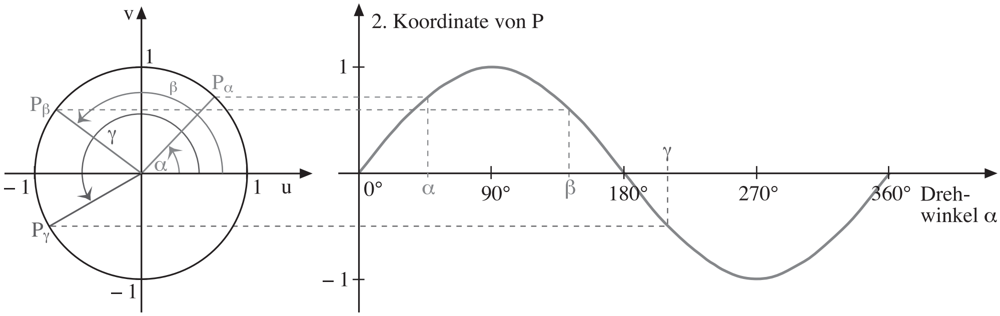
VORBEREITUNG AUF DAS ABITUR

9.5 Sinus- und Kosinusfunktionen

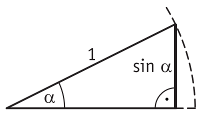
9.5.1 Bleib fit in Sinus- und Kosinusfunktionen

2

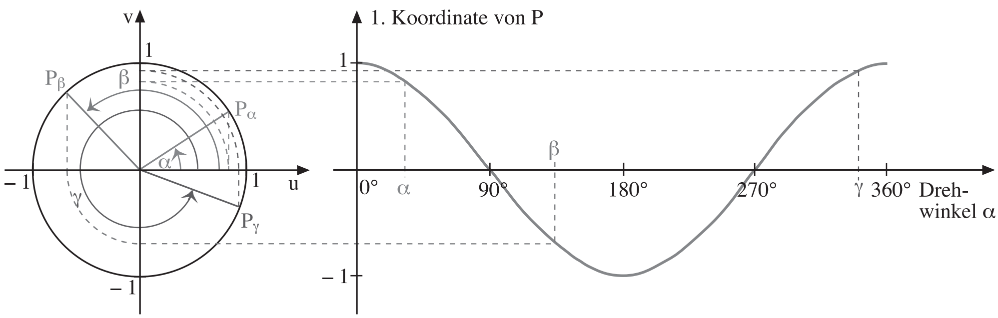
1. a) Die 2. Koordinate eines Punktes P kann direkt in den Graphen übertragen werden.



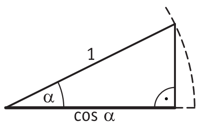
r = 1



b) Die 1. Koordinate eines Punktes P kann auf der Rechtsachse abgelesen werden. Um sie direkt in den Graphen zu übertragen, müssen wir die 1. Koordinate zunächst auf die Hochachse übertragen. Dazu zeichnen wir einen Viertelkreis von der 1. Koordinate auf der Rechtsachse bis zur Hochachse. Der Wert, an dem der Viertelkreis auf die Hochachse trifft, kann nun direkt in den Graphen als 2. Koordinate übertragen werden.



r = 1



2 **2. a)** $\sin^{-1}(0,4) \approx 23,58°$

Aus Symmetriegründen auch: $\alpha = 156,42°$

Also $\alpha_1 = 23,58°$, $\alpha_2 = 156,42°$

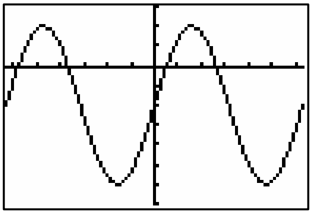
b) $\sin^{-1}(-0,7) \approx 315,57°$

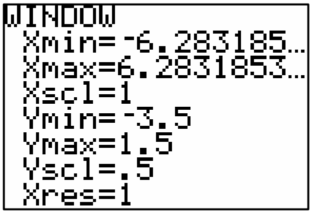
Aus Symmetriegründen auch $x = 224,43°$

Mit Periodizität und $z \in \mathbb{R}$ folgt:

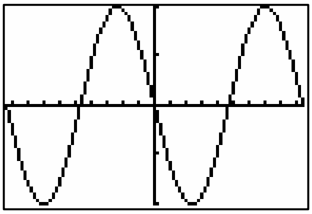
$L = \{315,57° + z \cdot 360°; 224,43° + z \cdot 360°\}$

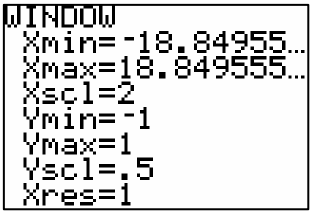
3. a) (1) $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - 1$



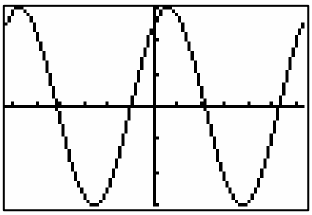


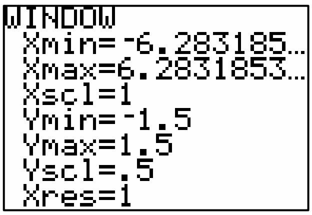
(2) $f(x) = -\sin\left(\frac{x}{3}\right)$





(3) $f(x) = 1,5 \cdot \sin(x + 1)$



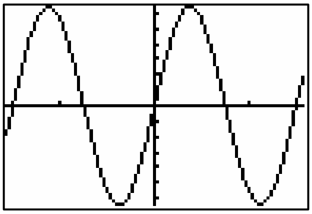


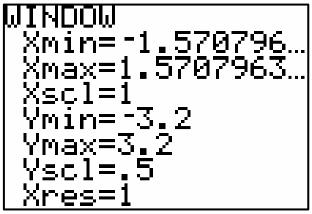
b) (1) Strecke den Graphen mit dem Faktor 2 parallel zur y-Achse und verschiebe den Graphen um 1 parallel zur y-Achse nach unten.

(2) Strecke den Graphen mit dem Faktor 3 parallel zur x-Achse und spiegele den Graphen an der y-Achse.

(3) Strecke den Graphen mit dem Faktor 1,5 parallel zur y-Achse und verschiebe den Graphen um 1 parallel zur x-Achse nach links.

2 **4. a)** $f(x) = 3{,}2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5}x\right)$, mit f(x): Auslenkung in cm, x: Zeit in s





b) $f(4) = 3{,}2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot 4\right) \approx -2{,}75$, also 2,75 cm unter der Ruhelage.

c) $\frac{-2{,}5}{3{,}2} = \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot x\right)$

$x = -0{,}214$

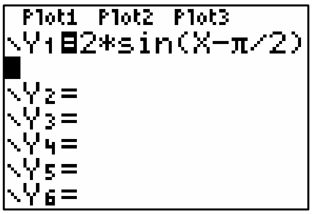
Im Sachzusammenhang ergeben sich als Lösungen $x_1 = 0{,}964$ und $x_2 = 1{,}286$.

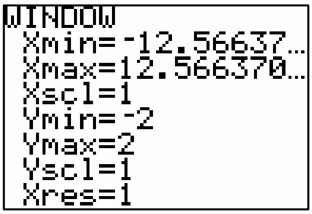
Also: Die Feder befindet sich nach ca. 1 s zum ersten Mal und nach ca. 1,3 s zum zweiten Mal in der Auslenkung –2,5 cm.

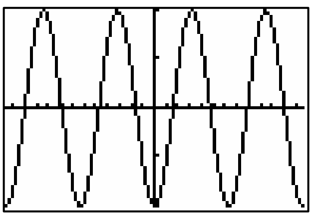
6 **5. a)** Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der x-Achse.

b) Verschiebung um π nach rechts.
c) Streckung mit Faktor 3 in Richtung der y-Achse.
d) Streckung mit Faktor 3 in Richtung der x-Achse und Verschiebung um 1 nach unten.
e) Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der x-Achse und Verschiebung um π nach rechts.
f) Streckung mit 4 in Richtung der x- und um 3 in Richtung der y-Achse.

6. a)







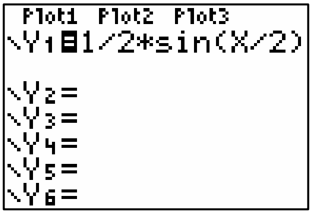
Periode: 2π

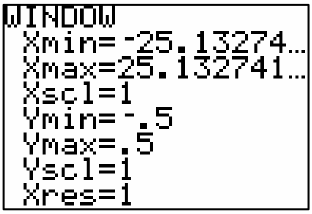
Nullstellen: $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

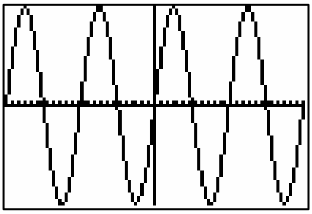
$\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

6

6. b)



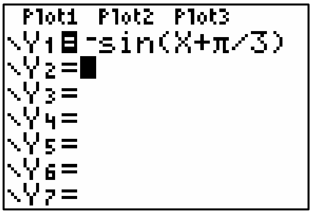


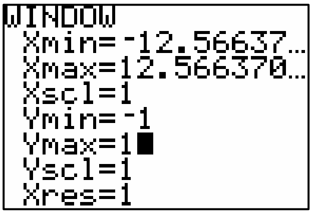


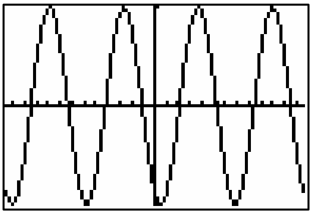
Periode: 4π

Nullstellen: $k \cdot 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

c)





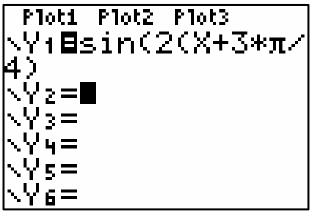


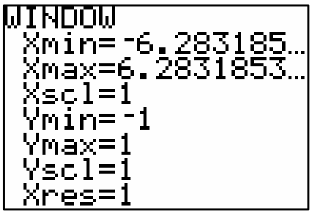
Periode: 2π

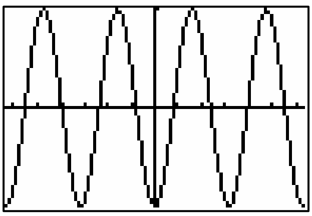
Nullstellen: $\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

$\frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

d)







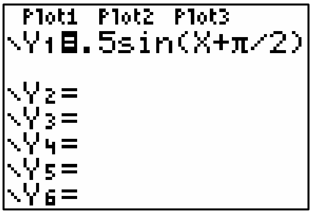
Periode: π

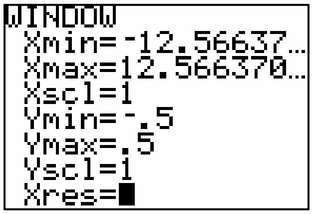
Nullstellen: $\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

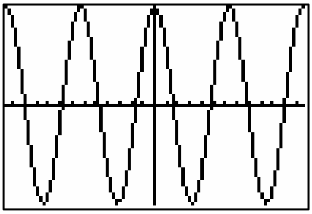
$\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

6

6. e)





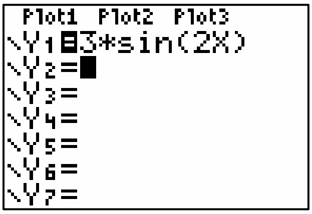


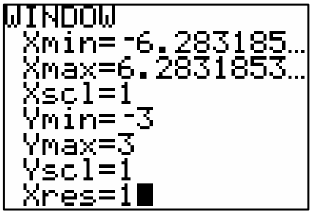
Periode: 2π

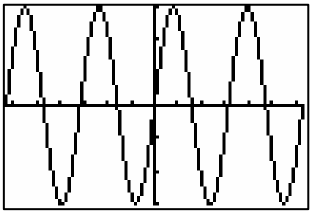
Nullstellen: $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

f)



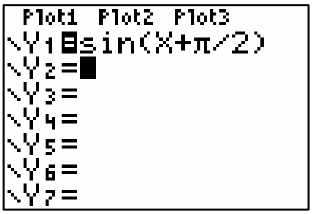


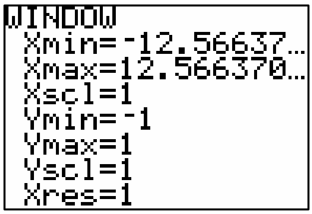


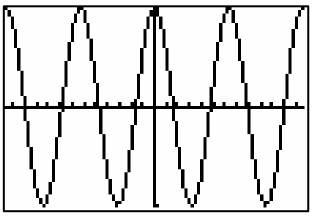
Periode: π

Nullstellen: $\frac{k}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

g)







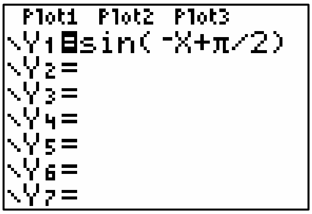
Periode: 2π

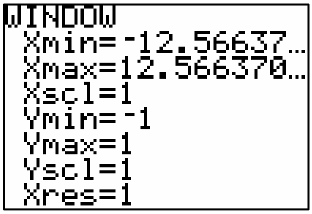
Nullstellen: $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

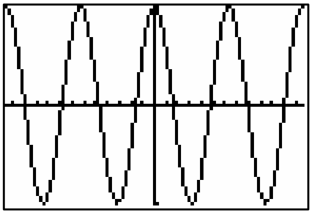
$\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

6

6. h)





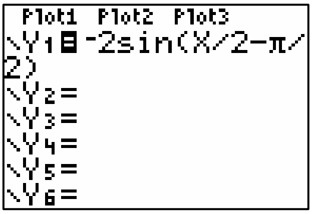


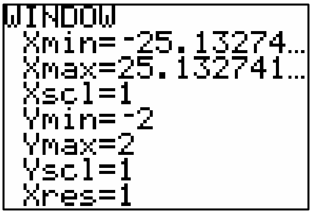
Periode: 2π

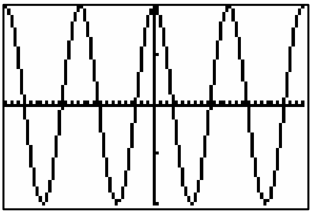
Nullstellen: $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

i)





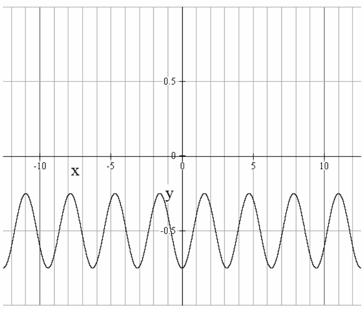


Periode: 4π

Nullstellen: $\pi + k \cdot 4\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$3\pi + k \cdot 4\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

7. a)

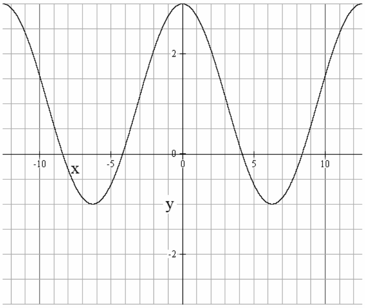


$-4\pi \le x \le 4\pi$
$-1 \le y \le 1$

- Strecken mit $\frac{1}{4}$ parallel zur y-Achse
- Strecken mit $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse
- Verschieben um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts
- Verschieben um $\frac{1}{2}$ nach unten

6

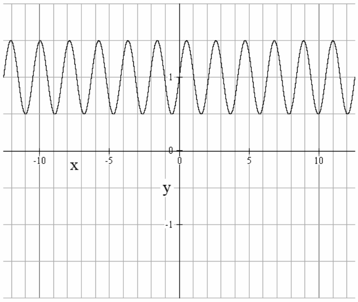
7\. **b)**



$-4\pi \le x \le 4\pi$
$-3 \le y \le 3$

- Strecken mit 2 parallel zur y-Achse
- Strecken mit 2 parallel zur x-Achse
- Verschieben um π nach links
- Verschieben um 1 nach oben

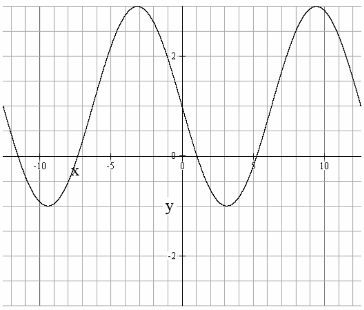
c)



$-4\pi \le x \le 4\pi$
$-2 \le y \le 2$

- Strecken mit $-\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse
- Strecken mit $\frac{1}{3}$ parallel zur x-Achse
- Verschieben um $\frac{\pi}{3}$ nach links
- Verschieben um 1 nach oben

d)



$-4\pi \le x \le 4\pi$
$-3 \le y \le 3$

- Strecken mit 2 parallel zur y-Achse
- Strecken mit 2 parallel zur x-Achse
- Verschieben um 2π nach links
- Verschieben um 1 nach oben

6

8. a) Der Graph von f_2 entsteht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links.

b) Der Graph von f_2 entsteht aus dem Graphen von f_1 durch Verschiebung um π nach unten und durch Verschiebung um π nach links.

c) Der Graph von f_2 entsteht aus dem Graphen von f_1 durch Streckung mit $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse und Streckung mit $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse.

9. a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ **c)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

7

10. a) $f(x)=2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ $[\,f(x)=2\cdot\cos 2x\,]$

b) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ $\left[f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

c) $f(x)=2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ $\left[f(x)=2\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$

d) $f(x)=4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$ $\left[4\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+1\right]$

11. Es ergeben sich folgende Funktionen, dabei ist x = 0 für November, x = 1 für Dezember u. s. w.

List auf Sylt:	$f(x)\approx 8\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{19}{20}\pi\right)+8{,}4$
Greifswald:	$f(x)\approx 8{,}9\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{9}{10}\pi\right)+8$
Travemünde:	$f(x)\approx 8{,}4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{9}{10}\pi\right)+8{,}25$
Hannover:	$f(x)\approx 8{,}6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{53}{60}\pi\right)+8{,}7$
Potsdam:	$f(x)\approx 9{,}6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{13}{15}\pi\right)+8{,}5$
Leipzig:	$f(x)\approx 9{,}3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{53}{60}\pi\right)+8{,}6$
Frankfurt/M.:	$f(x)\approx 9\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5}{6}\pi\right)+9{,}5$
Trier:	$f(x)\approx 8{,}3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5}{6}\pi\right)+9{,}1$
Regensburg:	$f(x)\approx 9{,}95\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5}{6}\pi\right)+7{,}75$
Freiburg:	$f(x)\approx 9\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5}{6}\pi\right)+10{,}5$

7

11. Fortsetzung
Damit ergeben sich folgende Werte:

	Nov.	Dez.	Jan.	Feb.	März	Apr.	Mai
List auf Sylt	6,0	3,0	0,9	0,4	2,3	5,9	10,5
Berechnet	7,1	3,4	0,9	0,5	2,2	5,5	9,7
Greifswald	4,5	1,3	–0,7	–0,5	2,1	6,2	11,1
Berechnet	5,2	1,4	–0,7	–0,5	2,0	6,1	10,8
Travemünde	5,0	1,9	0,1	0,2	2,8	6,4	11,1
Berechnet	5,7	2,0	0,0	0,3	2,6	6,5	10,8
Hannover	5,0	2,0	0,5	0,7	3,7	7,7	12,3
Berechnet	5,6	2,0	0,2	0,7	3,3	7,4	11,8
Potsdam	4,1	0,8	–1,0	–0,3	3,3	7,9	12,9
Berechnet	4,6	0,7	–1,0	–0,3	2,9	7,5	12,4
Leipzig	4,5	1,4	–0,5	0,1	3,4	7,8	12,5
Berechnet	5,3	1,4	–0,6	–0,1	2,7	7,1	11,9
Frankfurt/M.	4,8	1,7	0,5	1,7	5,0	9,2	13,6
Berechnet	5,0	1,7	0,5	1,7	5,0	9,5	14,0
Trier	4,7	1,7	0,8	1,9	5,0	8,5	12,6
Berechnet	5,0	1,9	0,8	1,9	5,0	9,1	13,3
Regensburg	3,0	–0,6	–2,2	–0,6	3,4	8,0	12,6
Berechnet	2,8	–0,9	–2,2	–0,9	2,8	7,8	12,7
Freiburg	5,7	2,5	1,5	2,9	6,5	10,1	14,3
Berechnet	6,0	2,7	1,5	2,7	6,0	10,5	15,0

	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Jahr
List auf Sylt	14,3	15,8	16,3	14,0	10,2	8,3
Berechnet	13,4	15,9	16,3	14,6	11,3	8,4
Greifswald	15,8	16,7	16,5	13,3	9,0	7,9
Berechnet	14,6	16,7	16,5	14,0	9,9	8,0
Travemünde	15,1	16,4	16,2	13,5	9,5	8,2
Berechnet	14,5	16,5	16,2	13,9	10,0	8,3
Hannover	15,8	17,0	16,6	13,5	9,4	8,7
Berechnet	15,4	17,2	16,7	14,1	10,0	8,7
Potsdam	16,7	17,9	17,4	13,9	9,1	8,6
Berechnet	16,3	18,0	17,3	14,1	9,5	8,5
Leipzig	16,4	17,8	17,3	13,8	9,2	8,6
Berechnet	15,8	17,8	17,3	14,5	10,1	8,6
Frankfurt/M.	17,1	18,6	17,9	14,5	9,4	9,5
Berechnet	17,3	18,5	17,3	14,0	9,5	9,5
Trier	15,8	17,4	16,7	14,0	9,5	9,1
Berechnet	16,3	17,4	16,3	13,3	9,1	9,1
Regensburg	16,3	17,7	16,9	13,4	8,1	8,0
Berechnet	16,4	17,7	16,4	12,7	7,8	7,8
Freiburg	17,5	19,5	18,8	15,8	10,6	10,5
Berechnet	18,3	19,5	18,3	15,0	10,5	10,5

7 **12. a)** • Periodenlänge:

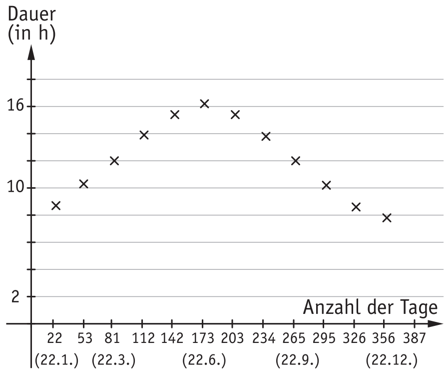
365 Tage: $b = \frac{2\pi}{365}$.

• Am Tage des Sommeranfangs (22.6.) ist die astronomische Sonnenscheindauer maximal, am Tage des Winteranfangs (22.12.) minimal. Maximaler und minimaler Wert sind gleich weit von dem Wert entfernt, der für Frühlings- bzw. Herbstanfang angegeben ist, nämlich 16,2 h – 12,0 h = 12,0 h – 7,8 h = 4,2 h also: a = 4,2;

$d = \frac{1}{2}(16{,}2 + 7{,}8) = 12.$

• Den Beginn einer periodischen Bewegung kann man auf den 22.3. (81. Tag seit Jahresbeginn) festlegen (Frühlingsanfang): c = 81.

Also: $f(x) = 4{,}2\sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 81)\right) + 12$



b) 10. Juli: 191. Kalendertag des Jahres:

$f(191) = 4{,}2\sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 81)\right) + 12 \approx 16{,}0$

Die astronomische Sonnenscheindauer beträgt also ungefähr 16 Stunden.

9.5.2 Modellieren mit Sinus- und Kosinusfunktion

10 **4. a)** f(x) = –2 · cos(x) hat keine Wendepunkte in I = [–1; 1]. Damit liegt bei x = –1 das größte Gefälle und bei x = 1 der größte Anstieg.

Also: $f'(-1) = 2 \cdot \sin(-1) \approx -1{,}68 \Rightarrow$ Das größte Gefälle ist 168 %.

Der zugehörige Winkel ist –59,3°.

b) $A = \left|-2\int_{-1}^{1} \cos x\,dx\right| - 2 \approx 1{,}366\ m^2$

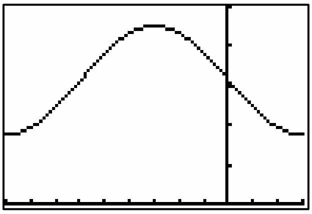
c) $V = 1{,}366 \cdot 500 \approx 683\ m^3$

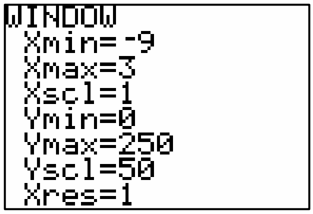
10 **5. a)** Da man davon ausgehen kann, dass die Sonnenscheindauer annähernd periodisch ist, mit der Periode t = 12, kann ein sinusförmiger Verlauf mit dem Streckungsfaktor $\frac{\pi}{6}$ angenommen werden. Wird t = 0 geeignet gewählt, ist keine Verschiebung parallel zur t-Achse zu berücksichtigen. Die Verschiebung nach oben bzw. die Streckung parallel zur y-Achse müssen durch die Parameter a, b angepasst werden.

b) LGS: $\left| \begin{array}{l} 191 = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(-1)\right) \\ 122 = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(1)\right) \end{array} \right|$

$\Rightarrow a = 156{,}5,\ \ b = -69$

$\Rightarrow f(t) = 156{,}5 - 69 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$





c) $f(-4) \approx 216{,}26$
$\Rightarrow$ Fehler: $\approx 1{,}74$ (absolut), Fehler: $\approx 0{,}8\ \%$
$f(3) \approx 87{,}5$
$\Rightarrow$ Fehler: $\approx 55{,}5$ (absolut), Fehler: $\approx 173\ \%$
Nur im Mai liefert das Modell eine gute Näherung. Das schlechte Ergebnis im Dezember könnte an besonders wenig Sonnentagen liegen. Hier zeigen sich deutlich die Grenzen der Modellierung.

d) Aus $180 = 156{,}5 - 69 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ folgt: $t \approx -0{,}66$.

Aus Symmetriegründen (Achsensymmetrie zu t = −3) folgt auch t = −5,33.
Also gibt es in den Monaten April und August mehr als 180 Sonnenstunden nach diesem Modell.

e) Wendepunkte der Funktion liegen bei t = 0 und t = −6, denn $f''(t) = 0$ bei t = 0 und t = −6.

f) Sonnenscheindauer insgesamt:

$$\int_{-9}^{3} f(t)dt = \left[156{,}5 \cdot t + 69 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{6}{\pi}\right]_{-9}^{3} = 1878$$

1878 entspricht einem absoluten Fehler von ca. 277 Sonnenstunden. Damit liegt der Fehler bei ca. 17,3 % (relativer Fehler).

10

6. **a)** $\frac{6}{s} = 0{,}024 \Rightarrow s = 250$

b) Eine Möglichkeit ist:

- Lege den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ in den Koordinatenursprung.
- Setze als Funktion an: $f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$
- Extrema von f(x) liegen in den Punkten A, B. Es folgt aus Symmetriegründen, dass der Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt.
- Es muss also gelten: $c = d = 0$

  Für a gilt: $a = \frac{3-(-3)}{2} = 3$
- Also: $f(x) = 3 \cdot \sin(bx)$
- Es gilt: $f'(x) \le 0{,}024$

  Insbesondere gilt: $f'(0) = 0{,}024$

  Also folgt aus $3 \cdot \cos(b \cdot 0) \cdot b = 0{,}024$, dass $b = \frac{0{,}024}{3} = 0{,}008$.
- Es ist $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}008} \approx 785{,}40$ die Periodenlänge.
- Es ist $\frac{p}{2} \approx 392{,}70$ die gesuchte Strecke.

c) Gesucht: $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Eine Möglichkeit ist:
A ist Minimum von g(x), B ist Maximum von g(x).
P(0 | 0) ist Wendepunkt von g(x). (0 | 0) ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Es folgt: Der Graph liegt symmetrisch zum Ursprung mit $b = d = 0$.
Aus $g'(0) = 0{,}024$ folgt $c = 0{,}024$.

$g'\left(\frac{s}{2}\right) = 0$ und $g\left(\frac{s}{2}\right) = 3$ also:

(1) $3a\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 0{,}024 = 0$ und (2) $a\left(\frac{s}{2}\right)^3 + 0{,}024\frac{s}{2} = 3$

Umformen von (1) ergibt:

$a\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 0{,}008 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{s}{2}$

(3) $a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + 0{,}008\frac{s}{2} = 0$

(2) − (3) ergibt:

$0{,}024\frac{s}{2} - 0{,}008\frac{s}{2} = 3$

$0{,}008s = 3$

$s = 375$

10

6. d) a) $s = 250$ b) $s = 392{,}70$ c) $s = 375$

$$M_a = \sqrt{250^2 + 6^2} \cdot 2 \approx 500{,}14$$

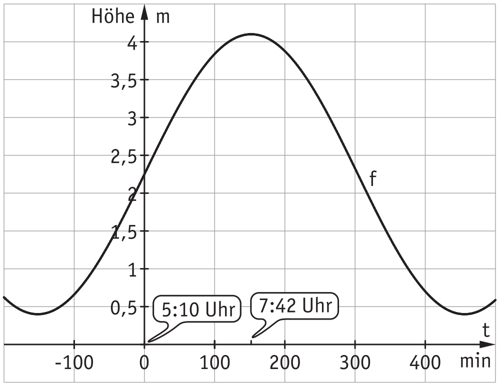
$$M_b \approx \sqrt{392{,}7^2 + 6^2} \cdot 2 \approx 785{,}49$$

$$M_c \approx \sqrt{375^2 + 6^2} \cdot 2 \approx 750{,}09$$

Bei b) und c) ist der Materialverbrauch tatsächlich größer als die angegebenen Werte, da der Profilverlauf gekrümmt ist.

11

7. a) $f(t) = 2{,}25 + 1{,}85 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{304} \cdot t\right)$ mit t = 0 bei 5.10 Uhr, t = Zeit in min.



b) - Zeitdifferenz zu t = 0 (5.10 Uhr) ist 410 Minuten
$\Rightarrow f(410) = 2{,}25 + 1{,}85 \cdot \sin(4{,}24) \approx 0{,}61$ m

- $3 = 2{,}25 + 1{,}85 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{304} \cdot t\right) \Rightarrow t_1 \approx 40{,}39$

Aus Symmetriegründen folgt $t_2 \approx 263{,}61$.
Zwischen ca. 5.50 Uhr und 9.34 Uhr ist der Wasserstand höher als 3 m.

c) 2.38 Uhr bis 7.42 Uhr 304 Minuten
Durchschnittliche Steiggeschwindigkeit in Meter pro Minute:

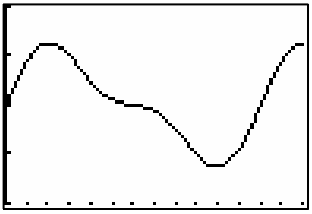
$$\frac{3{,}7}{304} \approx 0{,}01217$$

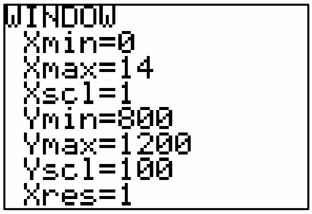
Wendepunkt von f(t) bei t = 0.
Maximale Steiggeschwindigkeit in Meter pro Minute:

$$f'(0) = 0{,}0191 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{304} \cdot 0\right) = 0{,}0191.$$

11

8. **a)** $f(x) = 45 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 1000$



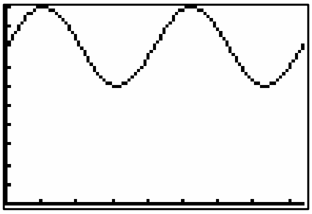


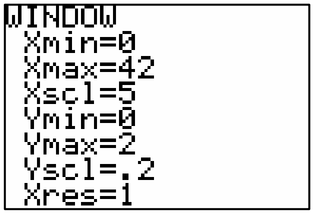
Der Graph ist geeignet, weil er eine Periode von 12 Monaten hat. Zunächst wächst die Anzahl schnell an, erreicht ein Maximum. Anschließend fällt sie schnell, dann langsamer und schließlich wieder schneller. Die Anzahl wird minimal und steigt wieder schnell.
Man erkennt: bei $x \approx 2$ liegt ein Maximum und bei $x \approx 10$ ein Minimum.
Im GRAPH-Modus erhält man das Maximum (2,04 | 1125,6) und das Minimum (9,96 | 874,4).
Also gilt:
Am 1. Februar ist die Herde am kleinsten (874 Tiere); am 1. Juni ist die Herde am größten (1126 Tiere).

b) Bis zum 1. Februar fällt der Bestand. Danach nimmt der Bestand bis zum 1. Juni zu. Ab diesem Zeitpunkt fällt der Bestand bis zum 1. Februar des nächsten Jahres.
Die Wendepunkte von f(x) sind zu bestimmen. Dort liegen extremale Steigungen vor. Man erhält im GRAPH-Modus die Stellen $x = 0$; $x = 3{,}53$; $x = 6$ und $x = 8{,}46$.
Bei $x = 0$ ist der größte Zuwachs und bei $x = 3{,}53$ bzw. $x = 8{,}46$ die größte Abnahme.
Im GRAPH-Modus (oder mit n-Derive) ermittelt man:
$f'(0) = 99{,}48$ und $f'(3{,}53) = -54{,}39\ \left(= f'(8{,}46)\right)$.
Am 1. April wächst der Bestand der Herde am stärksten (um ca. 100 Tiere pro Monat).
Am 15. Juli und am 15. Dezember fällt der Bestand am schnellsten (um ca. 55 Tiere pro Monat).

11

9. a) Der Graph hat eine Periode von ca. 21 s und schwankt zwischen den y-Werten 1,2 $\frac{m}{s}$ und 2 $\frac{m}{s}$. Die Schwimmerin wechselt in diesem Rhythmus ihre Geschwindigkeit zwischen diesen Werten.





$f(x) = 0,4 \cdot \sin(0,3x) + 1,6$

Die Geschwindigkeit ist dabei stets zwischen 1,2 $\frac{m}{s}$ und 2 $\frac{m}{s}$.

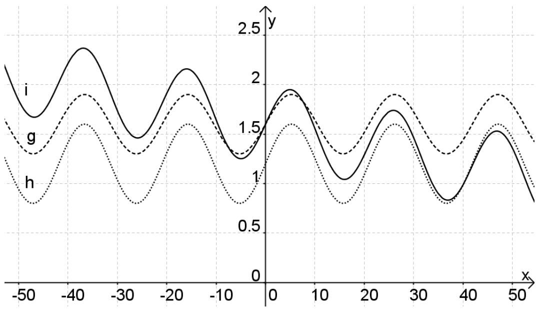
b) $f'(x) = 0,12\cos(0,3 \cdot x) = 0 \Rightarrow x_E = 5,24$, nach 5,24 s.
(Berechnung auch im GRAPH-Modus oder mit Max im Editor)

c) $s(t) = \int_0^t f(x)dx = \left[-\frac{0,4}{0,3}\cos(0,3x) + 1,6\right]_0^t$

$= -\frac{4}{3}\cos(0,3t) + 1,6t + \frac{4}{3}$

insbesondere s(120) ≈ 193,50 m.
(Berechnung auch mit fnInt möglich)

d)



g(x): $s(120) = \int_0^{120} 0,3\sin(0,3x) + 16dx$

$= \left[-\frac{0,3}{0,3}\cos(0,3x) + 1,6x\right]_0^{120} \approx 193,13 \text{ m}$

h(x): $s(120) = \int_0^{120} 0,4\sin(0,3x) + 1,2dx$

$= \left[-\frac{0,4}{0,3}\cos(0,3x) + 1,2x\right]_0^{120} \approx 145,50 \text{ m}$

11 **9. d)** Fortsetzung

$$i(x):\ s(120) = \int_0^{120} 0{,}4\sin(0{,}3x) + 1{,}6 - 0{,}01x\,dx$$

$$= \left[-\frac{0{,}4}{0{,}3}\cos(0{,}3x) + 1{,}6x - 0{,}005x^2\right]_0^{120} \approx 121{,}50\ \text{m}$$

Bei g(x) hält die Schwimmerin die Geschwindigkeit gleichmäßiger (zwischen 1,3 $\frac{m}{s}$ und 1.9 $\frac{m}{s}$).

Bei h(x) ändert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit (sie ist kleiner).
i(x): Der Vorgang ist nicht mehr gleichmäßig periodisch. Die Geschwindigkeiten schwanken nicht mehr zwischen zwei gleich bleibenden Werten. Die Durchschnittsgeschwindigkeit nimmt laufend ab.

e) Periode: $b = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$

Der Vorgang kann durch $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{1}{16}\pi x\right)$ modelliert werden;

x: Zeit in s.
Es gilt:

$$\int_0^{16} a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{16}x\right)dx = 25 \Leftrightarrow \left[-a\cos\left(\frac{\pi}{16}x\right)\cdot\frac{16}{\pi}\right]_0^{16} = a \cdot \frac{32}{\pi} = 25$$

$\Rightarrow a \approx 2{,}45\ \frac{m}{s}$ (maximale Geschwindigkeit)

Also: $f(x) = 2{,}45 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{16}x\right)$

Schätzung: Der Schwimmer schafft in 2 min (120 s) ca. 7,5 Bahnen (7,5 · 16 s). Die Strecke ist 7,5 · 25 = 187,5 m lang.
Berechnung:
7 Bahnen schafft er in 112 s, das sind 175 m. Es verbleiben noch 8 s.

$\int_2^8 2{,}45 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{16}x\right)dx = 12{,}48$ m. Insgesamt sind es 187,48 m.

9.5.3 Funktionsuntersuchungen

13

3. Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Für $k \in \mathbb{Z}$ liegen die Nullstellen bei 0 und $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

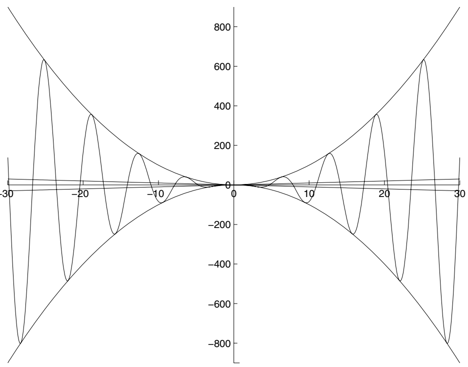
Für $k \in \mathbb{Z}$ berührt der Graph von f die Parabel $g_1(x) = x^2$ oder die Parabel $g_2(x) = -x^2$ an der Stelle kπ. Es existieren unendlich viele Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden. Diese liegen symmetrisch zur y-Achse.

Die Graphen $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ und $g(x) = x^2$ schneiden sich, wenn $\cos x = 1$, also für $x = 2k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{N}$.

Die Graphen von $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ und $h(x) = -x^2$ schneiden sich, wenn $\cos x = -1$, also für $x = (2k+1)\,\pi$.

An dieser Stelle berühren sich sogar die beiden Graphen:

$f'(x) = 2x\cos x + x^2 \cdot (-\sin x)$	$f'(2k\pi) = 2 \cdot 2k\pi$
$g'(x) = 2x$	$g'(2k\pi) = 2 \cdot 2k\pi$
	$f'((2k+1)\pi) = -2 \cdot (2k+1)\pi$
$h'(x) = -2x$	$h'((2k+1)\pi) = -2 \cdot (2k+1)\pi$



13

4. a) $f(x) = -0{,}5x + \pi - \sin(x)$

$f'(x) = -\cos(x) - 0{,}5$

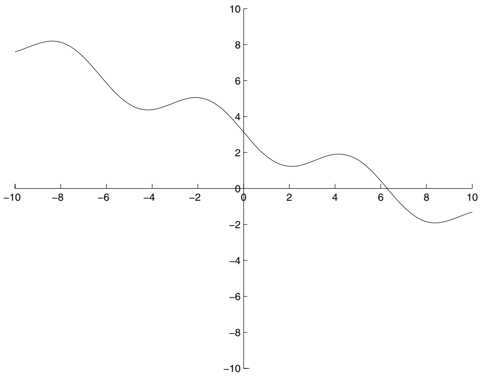
$f''(x) = \sin(x)$

$x \in [0, 2\pi]$ liefert für $f'(x) = 0$

$x_{E_1} = \frac{2}{3}\pi,\ \ x_{E_2} = \frac{4}{3}\pi$

$f''\left(x_{E_1}\right) = f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = \frac{2}{3}\pi$, TP (2,09 | 1,22)

$f''\left(x_{E_2}\right) = f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = \frac{4}{3}\pi$, HP (4,19 | 1,91)



$f(x) = -0{,}5x + \pi - \sin(x)$

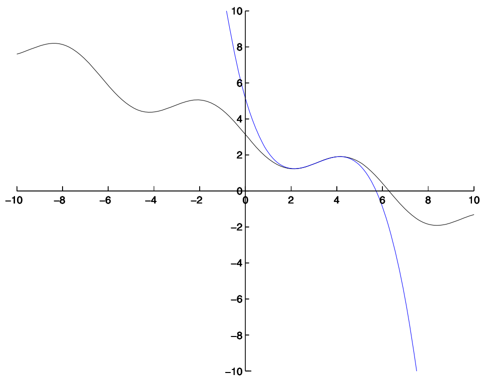
13

4. b) Setze: $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Löse das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} g(\pi) = f(\pi) \\ g'(\pi) = f'(\pi) \\ g''(\pi) = f''(\pi) \\ g'''(\pi) = f'''(\pi) \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} a\pi^3 + b\pi^2 + c\pi + d = \frac{\pi}{2} \\ 3a\pi^2 + 2b\pi + c = \frac{1}{2} \\ 6a\pi + 2b = 0 \\ 6a = -1 \end{matrix} \right|$$

Dann: $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 1{,}5708x^2 - 4{,}4348x + 5{,}1677$



$f(x) = -0{,}5x + \pi - \sin x$

$g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 1{,}5708x^2 - 4{,}4348x + 5{,}1677$

c) Funktionen schneiden sich auf $I = [0{,}2\,\pi]$ nur bei $x = \pi$.

Also: $A = \left| \int_0^{\pi} f(x) - g(x)dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} f(x) - g(x)dx \right| \approx 2{,}248$ oder

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|dx = 2{,}248.$$

$f(x) - g(x) = -\sin x + \frac{x^3}{6} - 1{,}5708x^2 + 3{,}9348x - 2{,}0261 = h(x)$

An den beiden Graphen ist erkennbar, dass das Maximum der Differenz nur an den Rändern x = 0 bzw. x = 2π liegen kann.

h (0) = –2,026 An beiden Stellen ist die Differenz maximal.

h (2π) = 2,026

13

5. Es gilt: $f'(x) = 2\cos(x)$

Damit gilt: $f(x) = 2\sin(x) + c$

Aus P(1 | 2) auf dem Graphen von f folgt: $c = 2 - 2\sin(1) \approx 0{,}317$

Eine Nullstelle von $f(x) = 2\sin x + 0{,}317$ liegt bei $x \approx -0{,}159$; eine weitere bei $x = \pi + 0{,}159 \approx 3{,}3$. Also liegt im Intervall [0; 3] keine Nullstelle von f.

$$A = \int_0^3 \left(2\sin(x) + 0{,}317\right)dx = \left[-2\cos(x) + 0{,}317x\right]_0^3 \approx 4{,}93$$

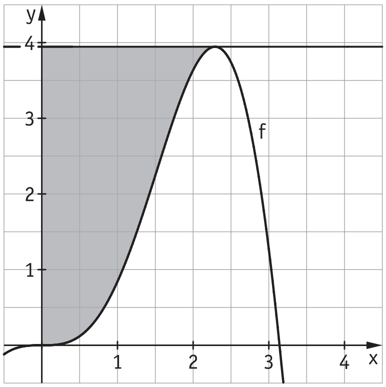
14

6. $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

HP(2,29 | 3,95)

Berechnung mit dem GTR liefert:

$$A = 2{,}29 \cdot 3{,}95 - \int_0^{2{,}29} x^2 \cdot \sin(x)dx \approx 5{,}46$$



7. a) Der Graph ist achsensymmetrisch, denn $f(-x) = f(x)$.

$f(x) = x \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$

$f'(x) = 0$ liefert mit dem GTR:

$x_{E_1} = -4{,}91$; $x_{E_2} = -2{,}03$; $x_{E_3} = 2{,}03$; $x_{E_4} = 4{,}91$ oder $x_{E_5} = 0$

Mit

$f''\left(x_{E_1}\right) > 0$ folgt TP bei x_{E_1} $\quad E_1\left(-4{,}91 \mid -4{,}81\right)$

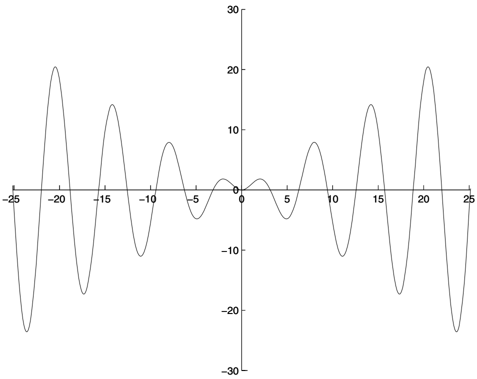
$f''\left(x_{E_2}\right) < 0$ folgt HP bei x_{E_2} $\quad E_2\left(-2{,}03 \mid 1{,}82\right)$

$E_3\left(2{,}03 \mid 1{,}82\right)$

$E_4\left(4{,}91 \mid -4{,}81\right)$

$f''\left(x_{E_5}\right) > 0$ folgt TP bei x_{E_5} $\quad E_5\left(0 \mid 0\right)$

14 **7. a)** Fortsetzung



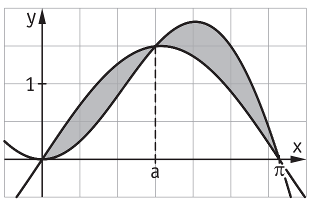
$f(x) = x \cdot \sin(x)$

b) Schnittpunkte von f(x) und sin(x) liegen bei: $\{-2\pi, -\pi, 0, 1, \pi, 2\pi\}$, werden aber nicht benötigt, wenn man das Integral folgendermaßen berechnet.

$$A = \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| x\sin(x) - \sin(x)dx \right| \approx 25{,}45$$

c) Schnittpunkte: $a \cdot \sin x = x \cdot \sin x$, $(a - x) \cdot \sin x = 0$, $a - x = 0$ oder $\sin x = 0$.

$x = 0$, $x = a$, $x = \pi$ sind die Schnittpunkte von $g_a(x)$ und f(x) im Intervall $[0, \pi]$. a muss positiv sein, sonst gibt es nur eine Fläche.



Aus $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) - a\sin(x)dx = 0$ folgt mit dem GTR (solve): a = 1,57…

Anderer Lösungsweg: Man betrachtet die beiden Flächen und vermutet $a = \frac{\pi}{2}$ (genau in der Mitte des Intervalls). Man stellt dann mit fn Int $\left(x \cdot \sin x - \frac{\pi}{2}\sin x,\ x, 0, \pi\right) = 0$ fest, dass die Vermutung stimmt.

14

8. a) Ein Graph entspricht der Winkelhalbierenden. In $f_t(x)$ ist der 2. Summand null $\Rightarrow t = 0$.
Einer der beiden anderen Graphen liegt zunächst über der Winkelhalbierenden $\Rightarrow t > 0$. Da $f_t\left(\frac{\pi}{2}\right)$ etwa 2 Einheiten über der Winkelhalbierenden liegt, folgt $t \approx 2$.
Der letzte der Graphen liegt zunächst unter der Winkelhalbierenden $\Rightarrow t < 0$. Da $f_t\left(\frac{\pi}{2}\right)$ etwa eine Einheit über der Winkelhalbierenden liegt, folgt $t \approx -1$.

b) Für t_1, t_2 und $t_1 \neq t_2$ gilt:
$x + t_1 \sin(x) = x + t_2 \sin(x) \Leftrightarrow \sin x = 0$, also $x = 0$ oder $x = \pi$ oder $x = 2\pi$

c) $f_t(x) = x + t \cdot \sin(x)$

$f_t'(x) = t \cdot \cos(x) + 1$

Für $t = 0$ besitzt f_t keine Extrema.

Aus $f_t'(x) = 0$ folgt $\cos x = -\frac{1}{t}$..

- Für $|t| < 1$ hat der Graph von f_t keine Extrema.
- Für $t = 1$ ist $x = \pi$. $f_1'(x) = \cos x + 1 \geq 0$
  Der Graph wächst. Es liegt kein Extremum vor.
- Für $t = -1$ ist $x = 0$ oder $x = 2\pi$. Auch hier ist $f_{-1}'(x) \geq 0$.
  Es liegen keine Extrema vor.
- Für $t > 1$ gilt: Es liegt ein Hoch- und ein Tiefpunkt vor. Für $t < -1$ gilt dies entsprechend auch, es beginnt aber mit einem Tiefpunkt.

d) $A = \int\limits_0^{2\pi} x + t \cdot \sin(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - t \cdot \cos(x)\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$

A entspricht der Fläche unter der Winkelhalbierenden:

$F_\Delta = \frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2$

e) $\int\limits_0^{\pi} x + t \cdot \sin(x)dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} x + t \cdot \sin(x)dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 - t\cos(x)\right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{2}x^2 - t\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi^2 + t + t = 2\pi^2 - t - \frac{1}{2}\pi^2 - t \Leftrightarrow 4t = \pi^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi^2$

14

9. a) $f_a(x)$:

$a \neq 0$, Nullstellen $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$

$g_a(x)$: $\sin x = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Nullstellen kann es nur geben für $0 < a \leq \sqrt{3}$ bzw. $-\sqrt{3} \leq a < 0$.
Es liegen immer zwei Nullstellen im Intervall $[0; 2\pi]$.

b) $f_a{}'(x) = \frac{a}{4}\cos(x)$

$g_a{}'(x) = -\frac{3}{a}\cos(x)$

Schnittpunkt:

$\frac{a}{4} \cdot \sin x = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \cdot \sin x$

$\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{a}\right) \cdot \sin x = \sqrt{3}$

Gleiche Steigung

$\frac{a}{4}\cos x = -\frac{3}{a}\cos x$

$\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{a}\right) \cdot \cos x = 0$

(1) $\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{a}\right) = 0$ geht nicht, da dann $0 \cdot \sin x = \sqrt{3}$ wäre.

(2) $\cos x = 0$, d. h. $x = \frac{\pi}{2}$.

$\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{a}\right) \cdot 1 = \sqrt{3} \quad | \cdot 4a$

$a^2 + 12 = 4\sqrt{3}a$

$a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 = 0$

$a = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 12} = 0$

$a = 2\sqrt{3}$

Für $a = 2\sqrt{3}$ berühren sich die Graphen an den Stellen $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

14

9. c) Die Graphen schneiden sich bei

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ und $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Es werden unendlich viele Flächen eingeschlossen. Stellvertretend werden zwei Flächen berechnet:

- $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f_2(x) - g_2(x)dx = \left[-\sqrt{3}x - 2\cos(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 0{,}19$
- $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} g_2(x) - f_2(x)dx = \left[\sqrt{3}x + 2\cos(x)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} = 2 + \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \approx 11{,}07$

10. a) $f_t(x) = t \cdot (\cos(x) - t)\ ;\ t \neq 0$

Nullstellen für $t \in [-1,1]$

$x = \cos^{-1}(t)$

$x = -\cos^{-1}(t)$

Sonst gibt es keine Nullstellen.

b) $t \neq 0$

$f_t(x) = t\cos(x) - t^2$

$f_t'(x) = -t \cdot \sin(x)$

$f_t''(x) = -t\cos(x)$

$WP_{t_1}\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, -t^2\right),\ WP_{t_2}\left(-\frac{\pi}{2} \,\middle|\, -t^2\right)$

Steigung von f_t ist $-t$ in WP_{t_1} und t in WP_{t_2}. Für jeden Graphen der Schar schneiden sich die Wendetangenten auf der y-Achse bei

$y = -t^2 + t \cdot \frac{\pi}{2}$.

11. Also: t = 1 (oberer Graph), t = 2 (mittlerer Graph), t = 3 (unterer Graph).

An der Stelle x = 2,7 gilt: $f_1 = 0{,}88;\ f_2 = 0{,}76;\ f_3 = 0{,}65$.

Ansatz: $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$ liefert $(t_1 - t_2) \cdot (\cos x - 0{,}5\sin x + 1) = 0$.

Die Nullstellen von $\cos x - 0{,}5\sin x + 1$ liegen bei

$x_1 = 2{,}21$ und $x_2 = 3{,}14$.

Die Graphen schneiden sich in P(2,21 + 2kπ | 1) und Q(π + 2kπ | 1).

14 **12.** **a)** $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ und $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ folgt: $a + c = 1$, $a + b = 3$, $-c = 2$,

also $a = 3$, $b = 0$ und $c = -2$.

Es gilt: $f(x) = 3 - 2\cos(x)$. $f'(x) = 2 \cdot \sin x$

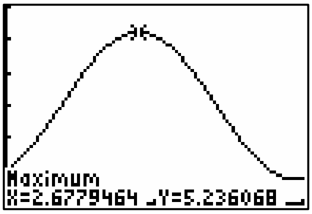
$f'(x) = 0$ für $x = 0$, $x = \pi$.

$f(0) = 1$; $f(\pi) = 5$; $f(5) = 2{,}43$

Also ist $P(\pi \mid 5)$ das Maximum.

b) Für $P\left(\frac{\pi}{2} \mid 4\right)$ gilt: $f(x) = 3 + \sin(x) - 2\cos(x)$

Maximum: Ermittlung mit dem GTR



Extremum bei P(2,678 | 5,236).

15 **13.** **a)** Der Anteil des 1. Summanden von f_k und g_k ist erkennbar durch das Unendlichkeitsverhalten. Man erkennt, dass jeweils ein Vertreter der Schar abgebildet ist. Blau: g_k; grün: f_k

In der linken Abbildung erkennt man das periodische Verhalten. Die Funktionswerte weichen maximal um ± 1 von den Funktionswerten von kx bzw. kx^2 ab. Das erkennt man auch gut an den Graphen.

$k > 0$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = \infty$

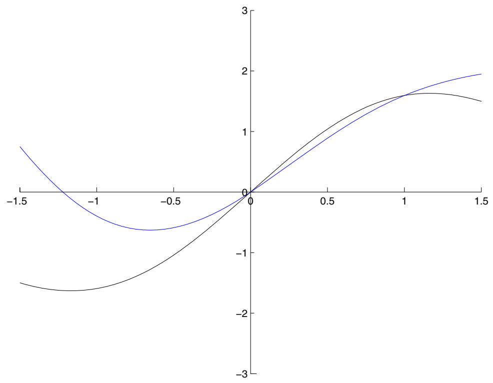
$k < 0$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = -\infty$

15

13. b) Die Graphen entsprechen den im rechten Bild auf S. 15 abgebildeten Graphen. Es wird nur eine Fläche eingeschlossen. Gleichsetzen der beiden Funktionsterme ergibt die beiden Schnittstellen x = 0 und x = 1.



$$f_{0,6}(x) = 0,6x + \sin\left(\frac{x}{0,6}\right); \qquad g_{0,6}(x) = 0,6x^2 + \sin\left(\frac{x}{0,6}\right)$$

$$\int_0^1 \left(f_{0,6}(x) - g_{0,6}(x)\right)dx = \left[0,3x^2 - 0,2x^3\right]_0^1 = 0,1$$

c) Folgende Hinweise fehlen in der 1. Auflage:
Hinweise: Betrachtet werden sollen nur Parameter k > 0.
Die Aufgabe sollte mit einem dynamischen Funktionenplotter (z.B. Graphix auf der CD-ROM Mathematik interaktiv, die dem Band 10 Elemente der Mathematik beiliegt) bearbeitet werden.
(Bemerkung: Die Aufgabe kann auch mit einem GTR bearbeitet werden, ist aber dann sehr aufwändig.)

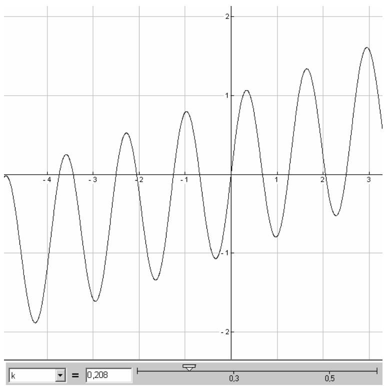
(I) $f_k(x) = kx + \sin\left(\frac{x}{k}\right),\ k > 0$

Vorbemerkung: Der Graph von f_k ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Daher beschränken wir die Untersuchung auf $x \geq 0$. (Die Überlegungen können dann auf den Fall $x < 0$ übertragen werden.)

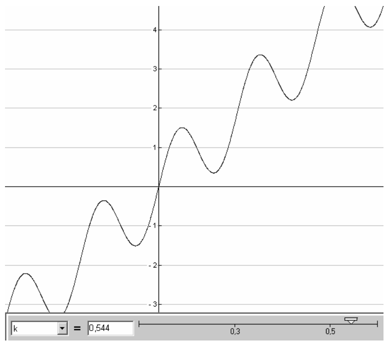
15 **13. c)** Fortsetzung

Typische Verläufe von Graphen:

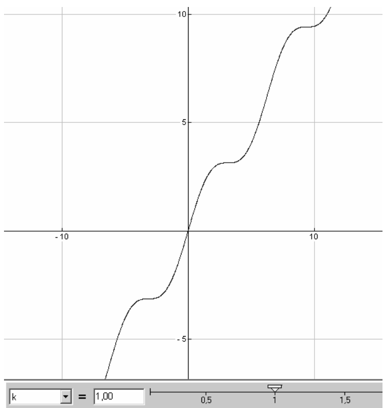
k = 0,208



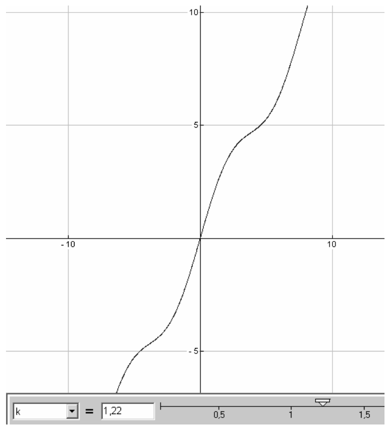
k = 0,554



k = 1



k = 1,22



Nullstellen für $x \geq 0$:

(1) $x = 0$

(2) - Für kleine k gibt es viele Nullstellen.

- Da $\sin\left(\frac{x}{k}\right) > -1$, gibt es für größere k keine Nullstellen mehr, da der Term $k \cdot x$ zu groß ist.
- Durch Probieren findet man: für $k \approx 0{,}47$ gibt es genau eine weitere Nullstelle bei $x \approx 2{,}1$. (Hier hat der Graph von f zudem ein Minimum.)

Extrema für $x \geq 0$:

$$f_k{}'(x) = k + \frac{1}{k}\cos\left(\frac{x}{k}\right) = 0, \text{ also } -k^2 = \cos\left(\frac{x}{k}\right)$$

Für $k \geq 1$ können keine Extrema vorliegen. Für $k = 1$ liegen bei $(2a + 1)\,\pi$ mit $a \in \mathbb{Z}$, also bei …, $-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi$, … Sattelpunkte vor.

15

13. c) Fortsetzung

(II) $g_k(x) = kx^2 + \sin\left(\frac{x}{k}\right),\ k > 0$

Nullstellen:

(1) $x = 0$

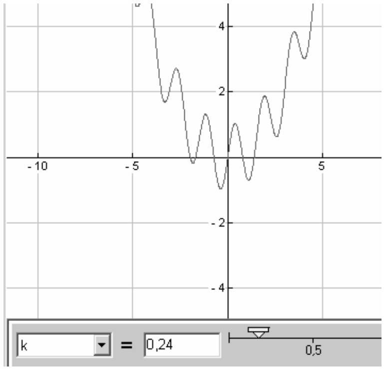
(2) Nullstellen links vom Ursprung, also für $x < 0$:

Es gibt mindestens eine weitere Nullstelle für $x < 0$.

Begründung:

Für kleine k gilt: Die Gleichung $\sin\left(\frac{x}{k}\right) = -kx^2$ hat mindestens eine Lösung $x < 0$, denn dann liegt $-kx^2$ zwischen -1 und 0.

(Beispiel: k = 0,24)

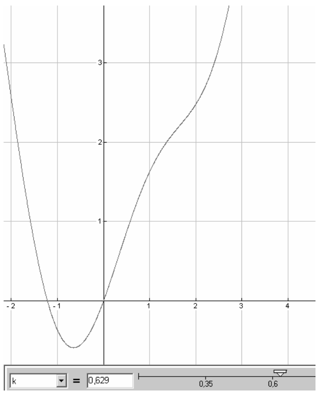


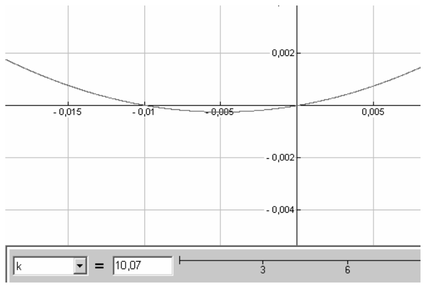
Für große k gilt: $\sin\left(\frac{x}{k}\right) \approx \frac{x}{k}$, also $k \cdot x^2 + \frac{x}{k} = 0$, d.h. eine Nullstelle liegt ungefähr bei $x = -\frac{1}{k^2}$.

Andere Begründung:

Die 1. Ableitung von g an der Stelle x = 0 ist $\frac{1}{k}$, also positiv. Es muss daher links von x = 0 mindestens eine Nullstelle geben, denn der Graph nähert sich für große k dem Graphen von kx^2 an.

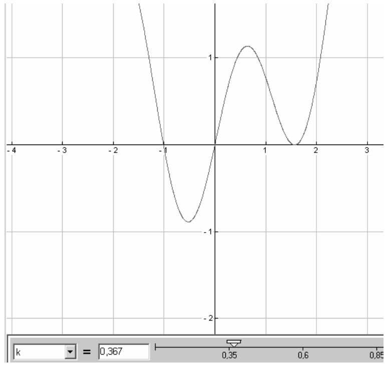
(Beispiele: k=0,629 Ausschnitt des Graphen für k = 10,07)





15 **13. c)** Fortsetzung

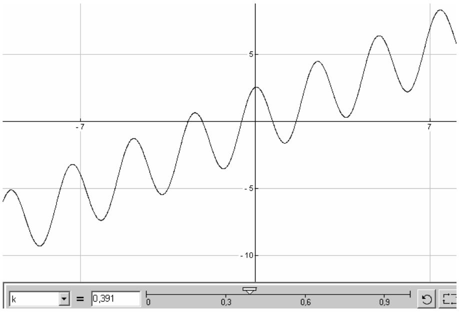
(3) Nullstellen rechts vom Ursprung, also für $x > 0$:
Für kleine k gibt es weitere Nullstellen für $x > 0$, wenn gilt:
$\sin\left(\frac{x}{k}\right) < 0$ für $\pi < \frac{x}{k} < 2\pi$.
Für größere k gibt es ab einer bestimmten Größe von k keine Nullstelle für $x > 0$ mehr, weil der Anteil von $\sin\left(\frac{x}{k}\right)$ nicht kleiner als -1 werden kann und kx^2 stark überwiegt.



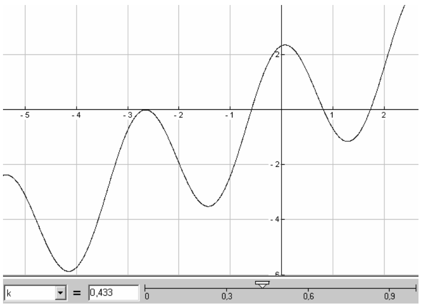
Durch Probieren findet man:
Für $k \approx 0{,}37$ gibt es genau eine weitere Nullstelle bei $x \approx 1{,}57$. (Hier hat der Graph von f zudem ein Minimum.)
(Beispiel: Ausschnitt des Graphen für $k = 0{,}367$)

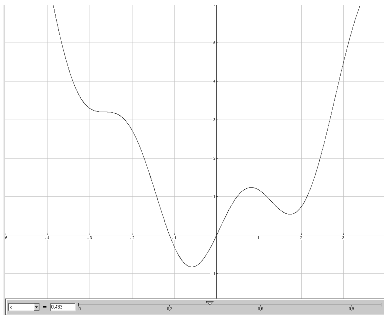
Extrema:
(1) Mindestens ein Minimum (das globale Minimum) liegt links vom Ursprung.
Begründung: Links von der Nullstelle (0 | 0) liegt eine weitere Nullstelle und der Graph verläuft zwischen diesen beiden Nullstellen im negativen Bereich, weil $g'(0) = \frac{1}{k}$ positiv ist.
(2) Weitere Extrema:
$g_k'(x) = 0$, also $2kx + \frac{1}{k}\cos\left(\frac{x}{k}\right) = 0$.
Der Graph dieser Ableitung ist eine der Kosinuskurve ähnliche Kurve, die sich um eine Ursprungsgerade mit positiver Steigung 2k schlängelt.
- Für kleinere k hat der Graph von g' weitere Nullstellen, also der Graph von g weitere Extrema. Man erkennt am Verlauf des Graphen von g' auch, dass es nur endlich viele Extrema geben kann.
- Für größere k gilt: Ab einem bestimmten k wird der Abstand von Graphenpunkten zur waagerechten Achse größer als $\frac{1}{k}$. Dann hat der Graph von g' keine weiteren Nullstellen, der Graph von g also keine weiteren Extrema.

15 **13. c)** Fortsetzung
Beispiel eines Ableitungsgraphen g' für $k = 0{,}391$:

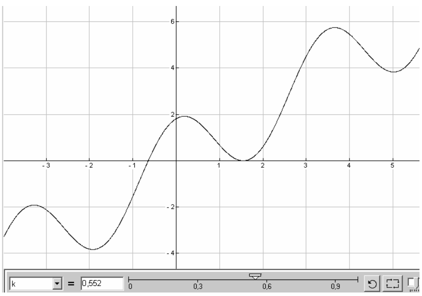


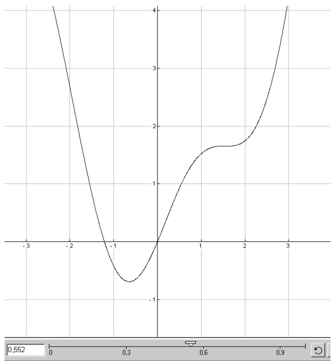
Zusätzlich findet man heraus:
Links vom Ursprung gibt es weitere Extrema, wenn $k \approx < 0{,}433$ ist.
Rechts vom Ursprung gibt es nur Extrema, wenn $k \approx < 0{,}552$ ist.
Beispiel: Graph von g' und g für $k = 0{,}433$:





Beispiel: Graph von g' und g für $k = 0{,}552$:





15

13. d) $f_k(x) = g_k(x) \Rightarrow kx = kx^2$, d. h. bei x = 0, x = 1 sind Schnittpunkte.

$$\int_0^1 (f_k(x) - g_k(x))\,dx = 2 \Leftrightarrow \left[\tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{3}kx^3\right]_0^1 = 2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{3}k = 2$$

$\Leftrightarrow k = 12$

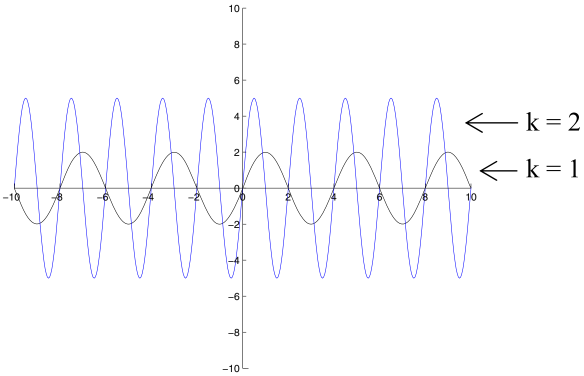
e) $WP(k\pi \mid k^2\pi)$ $x = k\pi \Leftrightarrow k = \frac{x}{\pi}$, d. h. $y = \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \cdot \pi$

Ortskurve: $w(x) = \frac{1}{\pi}x^2$

f) $f_k{}'(0) = g_k{}'(0)$, also $k + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$. Das geht nur, wenn k = 0 ist.

Dies ist ausgeschlossen.

14. a)



$f_1(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; $f_2(x) = 5 \cdot \sin(\pi x)$

Nullstellen $f_1(x)$, $f_2(x)$: x = 2; 4; 6; 8; 10; …

Für die durch 4 teilbaren Nullstellen gilt:

$f_1{}'(x_N) = \pi$, also $\alpha \approx 72{,}3°$; $f_2{}'(x_N) = 5\pi$, also $\beta \approx 86{,}4°$

Für die Nullstellen mit Rest 2 bei Division durch 4 gilt:

$f_1{}'(x_N) = \pi$, also $\alpha \approx -72{,}3°$; $f_2{}'(x_N) = 5\pi$, also $\beta \approx 86{,}4°$

15 **14. b)** Der Graph von $f_2(x)$ hat Nullstellen bei jeder geraden ganzen Zahl x.

$$A_{f_2}(x) = \int_0^1 5\sin(\pi x)dx = \left[-\frac{5}{\pi}\cdot\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18$$

Der Graph von $f_k(x)$ hat Nullstellen bei $n\cdot\frac{2}{k}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

$$A_{f_k}(x) = \int_0^{\frac{2}{k}} \left(k^2+1\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx = \left[-\left(k^2+1\right)\cdot\frac{2}{k\pi}\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)\right]_0^{\frac{2}{k}}$$

$= \frac{4\left(k^2+1\right)}{k\pi} = \frac{4}{\pi}\left(k+\frac{1}{k}\right)$. Fasst man $A(k) = \frac{4}{\pi}\left(k+\frac{1}{k}\right)$ als Funktion auf, so ergibt sich: $A'(k) = \frac{4}{\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. $A''(k) = \frac{4}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{1}{k^3}$.

$A'(1) = 0$ und $A''(1) > 0$: bei $k = 1$ liegt ein Minimum von A,

c) $V(k) = \text{fnInt}\left(\left(k^2+1\right)^2\cdot\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\cdot x\right)\right)^2,\ x, ...0,\ \frac{2}{k}\right)\cdot\pi$

muss für verschiedene k berechnet werden.
Werte sind

k	0,1	1	0,5	0,6	0,7
V(k)	32,0	12,6	9,8	9,7	10,0

Es gibt ein kleinstes Volumen, wenn $k \approx 0{,}6$.

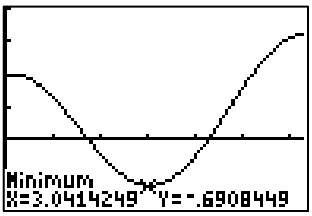
Oder mit CAS: $V(k) = \frac{\left(k^2+1\right)^2\cdot\pi}{k}$, also $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

d) Es ist $f_k'(x) = \frac{1}{2}\pi k\left(k^2+1\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)$.

Aus $f_k'(x) = 0$ und $f_k''\left(x_E\right) < 0$ folgt für das erste Maximum von $f_k(x)$: $HP\left(\frac{1}{k}\ \middle|\ k^2+1\right)$. Die Ortslinie ist: $h(x) = \frac{1}{x^2}+1$.

15. a) $f_k'(x) = k - \sin(x)$, $f_{0,1}'(x) = 0{,}1 - \sin(x)$

Mit dem Rechnerbefehl Max und Min erhält man:
Max (0,1 | 1,0); Min (3,0 | –0,7)



$f_k'(x) = k - \sin(x) = 0$, d. h.
$\sin(x) = k$. Waagerechte Tangenten gibt es nur für $0 < k \le 1$. Für $k = 1$ liegt aber kein Extremum vor.
Extrema nur für $0 < k < 1$.

15

15. b) Aus 0,6x + cos(x) − 1 = 0 folgt mit den Nullstellen als Integrationsgrenzen

$$\left|\int_0^{1,426} 1-0,5x-f_{0,1}(x)dx\right| + \left|\int_{1,426}^{3,310} 1-0,5x-f_{0,1}(x)dx\right|$$

$$= \left|\left[-0,3x^2+x-\sin(x)\right]_0^{1,426}\right| + \left|\left[-0,3x^2+x-\sin(x)\right]_{1,426}^{3,310}\right| = 0,539$$

c) Aus $g(3) = f_{0,1}(3)$; $g(4) = f_{0,1}(4)$; $g'(2) = f_{0,1}{}'(2)$ folgt mit

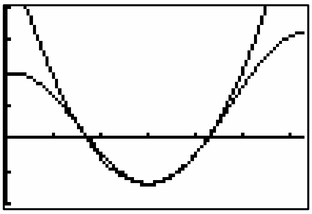
$g(x) = ax^2 + bx + c$ und $g'(x) = 2ax + b$:

$$\left|\begin{array}{r} 9a+3b+c=-0,69 \\ 16a+4b+c=-0,25 \\ 4a+b=-0,81 \end{array}\right|$$

Lösung ist a = 0,417; b = –2,479; c = 2,994

$g(x) = 0,417x^2 - 2,479x + 2,994$

Die größte Differenz tritt am Rand bei x = 0 auf:
Wert = 2,994 − 1 = 1,994



d) Wendepunkte von $f_k(x)$: $WP_1\left(\frac{\pi}{2} \;\middle|\; \frac{k\pi}{2}\right)$, $WP_2\left(\frac{3\pi}{2} \;\middle|\; \frac{3k\pi}{2}\right)$

$f_k{}'(x) = k - \sin x$; $y = mx + b$

W_1: $\frac{k\pi}{2} = (k-1)\cdot\frac{\pi}{2} + b \rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

Wendetangente 1: $y = (k-1)\cdot x + \frac{\pi}{2}$

W_2: $\frac{3k\pi}{2} = (k+1)\cdot\frac{3\pi}{2} + b \rightarrow b = -\frac{3\pi}{2}$

Wendetangente 2: $y = (k+1)\cdot x - \frac{3\pi}{2}$

Aus $W_1(x) = W_2(x)$ folgt, dass sich die Tangenten unabhängig von k stets bei x = π schneiden.