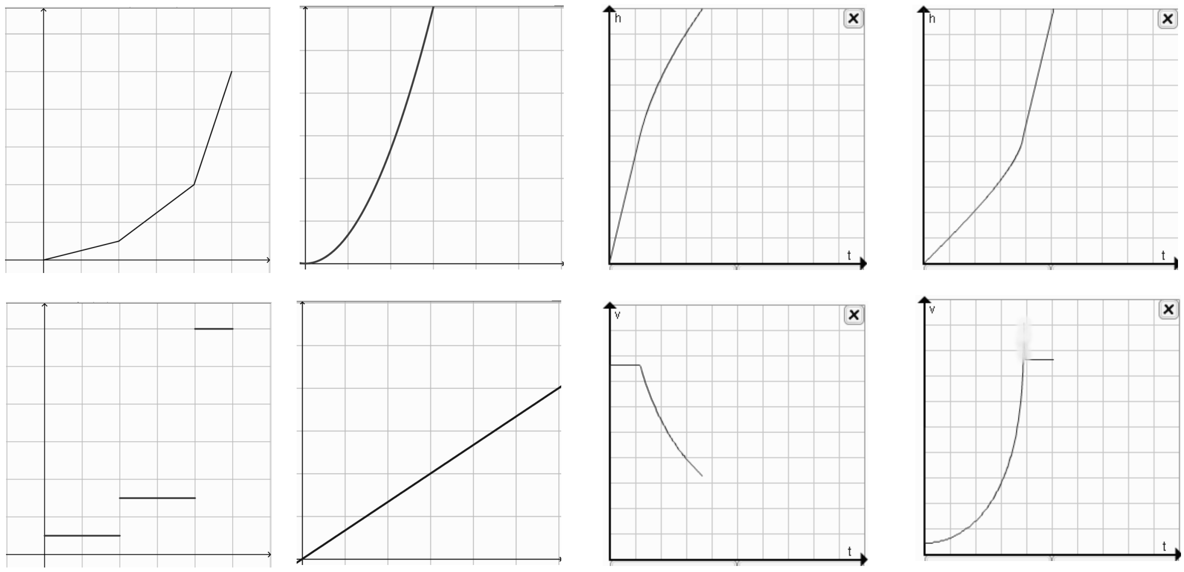
Lösungen zu den Vermischten Aufgaben Kapitel 5

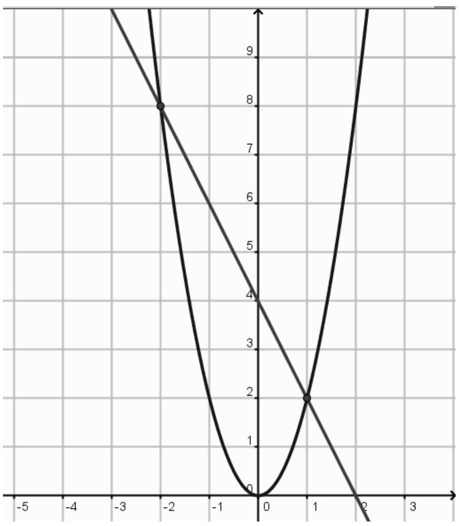
1. Qualitative Skizzen der Füllgraphen (oben) und der zugehörigen Geschwindigkeitsgraphen (unten).

a) b) c) d)



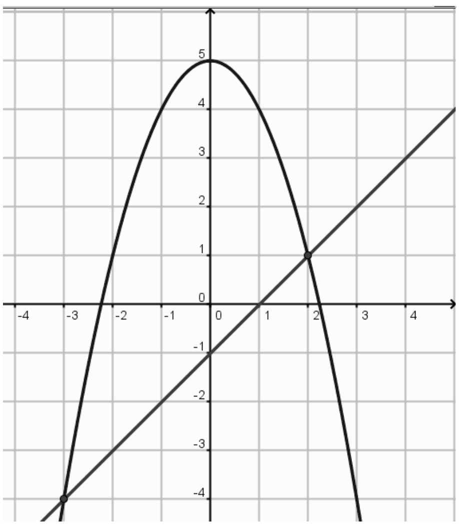
2. a) $\rightarrow$ IV) b) $\rightarrow$ II) c) $\rightarrow$ I) d) $\rightarrow$ III)

3. (A) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$



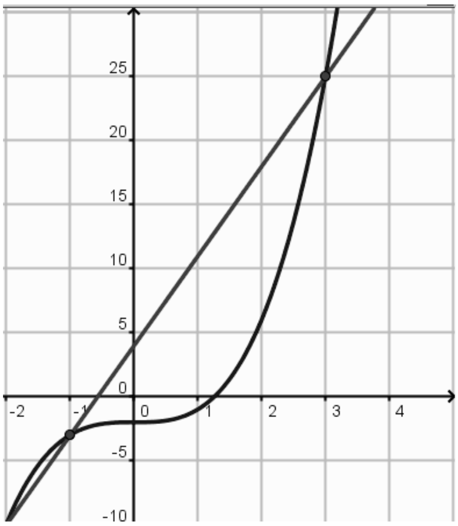
$f'(x) = 4x \;\Rightarrow\; f'(-2) = -8;\; f'(1) = 4$

(B) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$



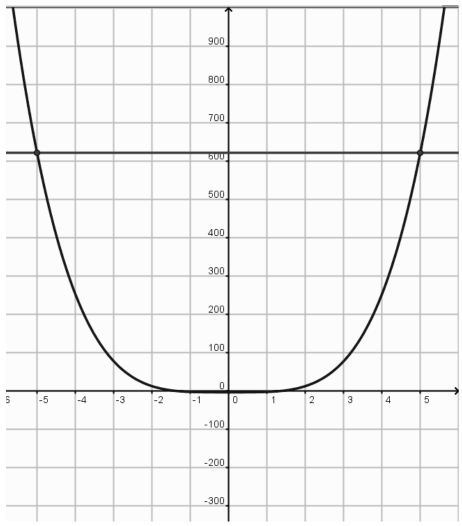
$f'(x) = -2x \;\Rightarrow\; f'(-3) = -6;\; f'(2) = -4$

3. (C) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$



$f'(x) = 3x^2 \;\Rightarrow\; f'(-1) = -3;\; f'(3) = 27$

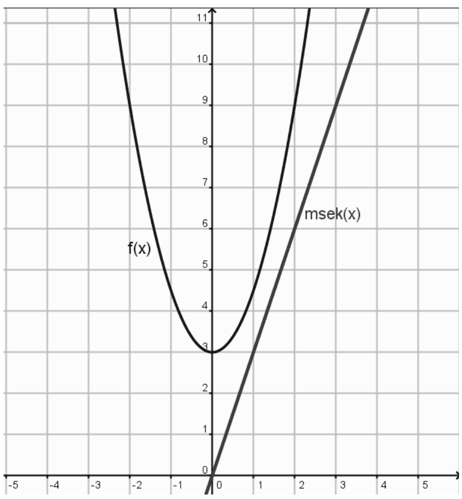
(D) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$



$f'(x) = 4x^3 \;\Rightarrow\; f'(-5) = -500;\; f'(5) = 500$

4. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{4}+h-\sqrt{4}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$

5. a)



b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1{,}5\left(x^2+2hx+h^2\right)+3-1{,}5x^2-3}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} 3x + 1{,}5h = 3x$

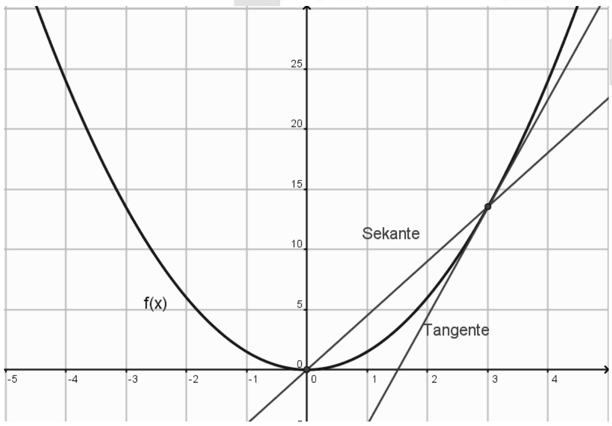
6. a) Mit der Sekantensteigungsfunktion msek(a) und einem möglichst kleinen h findet man einen guten Näherungswert für die Steigung eines Funktionsgraphen an der Stelle a.
b) Der Differenzenquotient ist die Steigung dieser Sekante.
c) Differenzenquotient – Sekantensteigung; Grenzwert des Differenzenquotienten – Tangentensteigung
d) Die Ableitungsfunktion gibt die Tangentensteigung an und ist somit der Grenzwert des Differenzenquotienten; der Differenzenquotient selbst gibt die Sekantensteigung an.
e) Weil die Steigung konstant ist und somit sowohl der durchschnittlichen, als auch der momentanen Steigung entspricht.
f) An den Stellen 1 und –1.

7. a) Falsch; Nachweis über Graphen msek(x) mit h = 1.
b) Korrekt; mit h = 2 ist msek(0) $\frac{h^2}{h} = h = 2$ und $f'(x) = 2x \;\Rightarrow\; f'(1) = 2$.
c) Korrekt; Nachweis über Symmetrie oder msek(x) mit x = –2 und h = 4.
d) Falsch; diese Formulierung ist nicht korrekt, weil sie auf ein Dividieren durch null führt.

8. a) Sekante: Gerade, die den Graphen in den beiden interessierenden Punkten schneidet.
Sekantensteigung: Steigung der Sekante; kann durch msek(x) ermittelt werden.
Differenzenquotient: gibt die Sekantensteigung an.
Tangente: Gerade, die den Graphen im interessierenden Punkt berührt.
Grenzwert des Differenzenquotienten: gibt die Tangentensteigung an.

b) $\text{msek}(3) = \frac{1{,}5 \cdot 3{,}1^2 - 1{,}5 \cdot 9}{0{,}1} = 9 \quad (h = 0{,}1)$

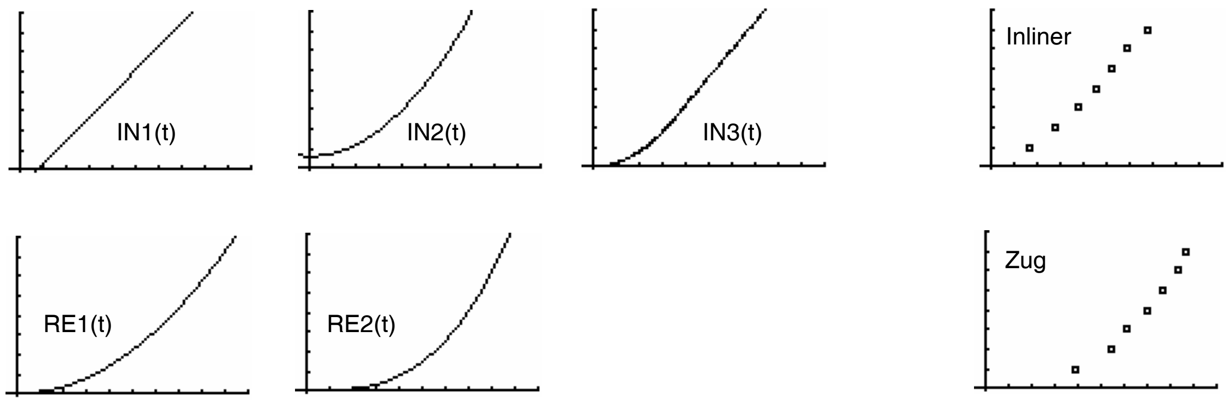
$f'(3) = 9$



9. (I) → B; (II) → C; (III) → A

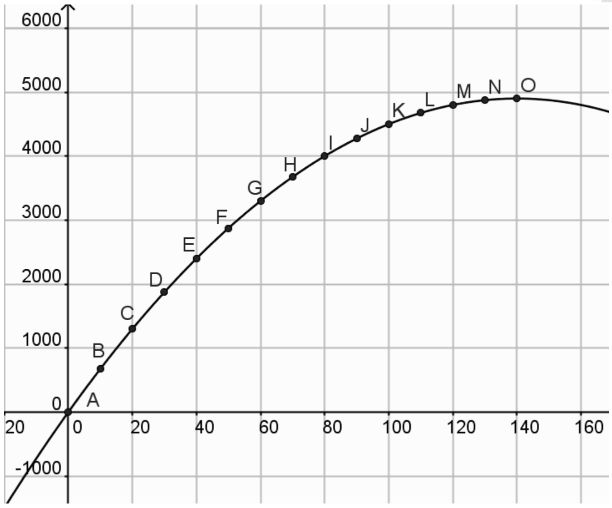
10. a) A beispielsweise an der Stelle x = 3,5.
b) positiv: [–3; 0]; negativ: [–1; 3]
c) D an der Stelle x = 1.
d) E an den Stellen x = –1 oder x = 3.
e) Beispielsweise [–2; 0]
f) Beispielsweise F an der Stelle x = –1, G an der Stelle x = 3.

11. Skizzen der Modellfunktionen und der Datensätze.
Modelle: Daten:



Die Startphasen verlaufen bei den Inlinern mit einer recht kurzen Beschleunigung, d. h. die Höchstgeschwindigkeit wird schnell erreicht und dann konstant gehalten. Beim Zug ist eine sehr lange Beschleunigungsphase vorhanden, die allerdings in eine deutlich höhere Höchstgeschwindigkeit mündet. Somit ergibt sich, dass die am besten „passenden“ Funktionen RE2 und IN3 sind. Andere Argumente sind: Geschwindigkeitsverlauf, Endgeschwindigkeit, Krümmung, Funktionsgraphenübereinstimmung.
Um Geschwindigkeitsvergleiche anzustellen, betrachtet man die Ableitungen der Funktionen:
$IN3'(t) = 2t$ für $0 \leq t \leq 4$ und $IN3'(t) = 0{,}18t^2$ für $t \geq 0$
Gleichsetzen ergibt: $t_1 = 0$; $t_2 = 6{,}2$
Somit ist der Zug nach 6,2 s schneller als der Inliner.
Die Endgeschwindigkeiten liegen bei: $IN3'(6{,}8) = 7$; $RE2'(8{,}7) = 13{,}6$ (letzte Sekantensteigungen aus der Tabelle: IN: 5,6; RE: 12,5).

12. Eine passende Funktion ist: $f(x) = -0{,}25(x-140)^2 + 4900 = x(-0{,}25x+70)$.
Somit: $f'(x) = -0{,}5x + 70$



a) $f'(0) = 70$ (Anfangsgeschwindigkeit);
$f'(70) = 35$ (Geschwindigkeit nach halber Bremszeit) $\Rightarrow$ nach 70 s halbe Anfangsgeschwindigkeit.

b) $1000 = f(x) \Rightarrow x_1 = 15{,}1 \quad f'(x_1) = 62{,}5$
$2000 = f(x) \Rightarrow x_2 = 32{,}3 \quad f'(x_2) = 53{,}9$
$3000 = f(x) \Rightarrow x_3 = 52{,}8 \quad f'(x_3) = 43{,}6$
$4000 = f(x) \Rightarrow x_4 = 80 \quad f'(x_4) = 30$

c) Durchschnittsgeschwindigkeit:
$\frac{f(140)-f(0)}{140} = \frac{4900-0}{140} = 35$
Momentangeschwindigkeit mit dieser Geschwindigkeit: $f'(x) = 35 \Rightarrow x = 70$
Grafische Ermittlung durch Parallelverschiebung der Sekanten zur Tangenten.

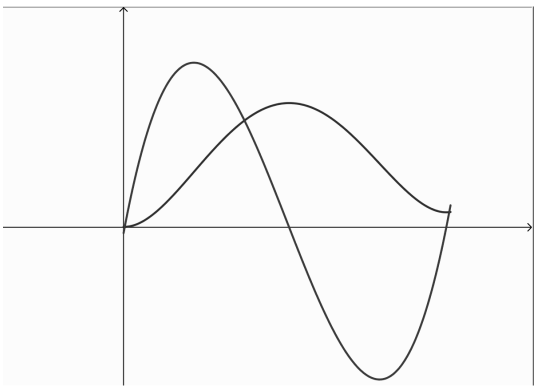
d) $f'(x)$ ist linear $\Rightarrow$ der Geschwindigkeitsverlust ist linear, die Beschleunigung konstant. Die Bremswirkung ist also anfangs sehr gering, wird aber immer stärker.

13. Mathematisch: Bei einem gewählten Graphen handelt es sich bei der „mittleren Steigung“ zwischen zwei Punkten um die Steigung der Sekante durch diese beiden Punkte, bei der „Momentansteigung“ um die Tangentensteigung in einem Punkt.
Außermathematisch, z.B. Mechanik: Bei einem Weg-Zeit-Graphen ist die „mittlere Steigung“ die Durchschnittsgeschwindigkeit, die „Momentansteigung“ die Momentangeschwindigkeit.

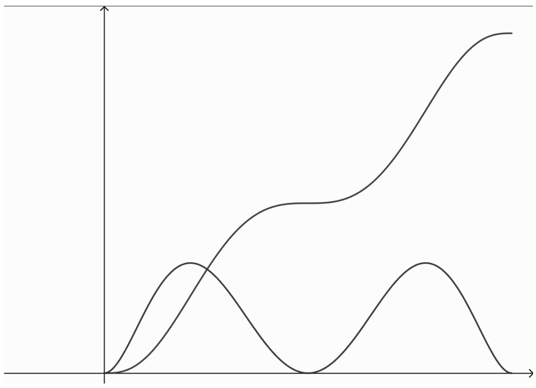
14. Man erhält die Steigung eines Graphen in einem Punkt, indem man zwei Punkte, und somit deren Sekante, auf diesen einen Punkt als Grenzwert „zulaufen“ lässt. So erhält man die Tangente in diesem Punkt. Die Steigung der Sekante (also der Differenzenquotient) geht hierbei in die Steigung der Tangente über. Somit ist die Tangentensteigung der Grenzwert des Differenzenquotienten.

15. Skizzen der Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme:

a)



b)



Bestell-Nr. 85480

16.

x	f(x)	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Höhe	Luftdruck	Durchschnittliche Luftdruckänderung mit der Höhe	Momentane Luftdruckänderung mit der Höhe
Zeit	Bakterienanzahl	Durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur	Momentane Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur
Zeit	Weg	Durchschnittsgeschwindigkeit	Momentangeschwindigkeit
Flüssigkeitsmenge	Füllhöhe einer Flüssigkeit in einem Gefäß zu einem bestimmten Zeitpunkt	Durchschnittlicher Anstieg einer Flüssigkeit in einem Gefäß	Momentaner Anstieg einer Flüssigkeit in einem Gefäß
zurückgelegter Weg	verbrauchte Benzinmenge	Durchschnittlicher Benzinverbrauch	Momentaner Benzinverbrauch
Entfernung von der Quelle des Flusses	Höhe des Wasserspiegels über NN	Durchschnittliches Gefälle des Flusses	Momentanes Gefälle des Flusses

Bestell-Nr. 85480

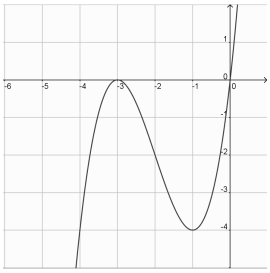
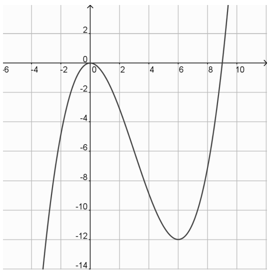
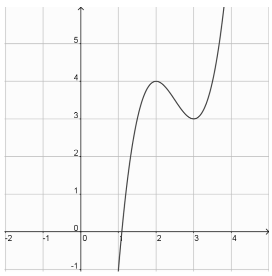
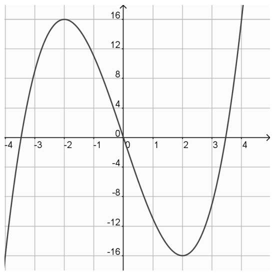
Lösungen zu den Vermischten Aufgaben Kapitel 6

1. a) $f'(x) = 0{,}2x^2 + 8x$ b) $f'(x) = -12x^3 + 12x - 2$ c) $f'(x) = -8x^{-2}$ d) $f'(x) = -\frac{0{,}1}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ f) $f'(x) = m$ g) $f'(u) = 9u^2 - 4u$ h) $A'(r) = 2\pi \cdot r$

2.

$f'_1(x) = 3x^2 + 12x + 9$	$f'_2(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$	$f'_3(x) = 6x^2 - 30x + 36$	$f'_4(x) = 3x^2 - 12$
$x_1 = -1$ (Linkskr.)	$x_1 = 0$ (Rechtskr.)	$x_1 = 2$ (Rechtskr.)	$x_1 = 2$ (Linkskr.)
$x_2 = -3$ (Rechtskr.)	$x_2 = 6$ (Linkskr.)	$x_2 = 3$ (Linkskr.)	$x_2 = -2$ (Rechtskr.)

3. $f'_1(a) = 2$; $f'_2(a) = 0$; $f'_3(a) = 7$; $f'_4(a) = 3$; $f'_5(a) = 48$ Somit Reihenfolge: f_5; f_3; f_4; f_1; f_2

4. a) $f'(x) = x \Rightarrow x = 1$ b) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$ keine Stelle

c) $f'(x) = \cos(x) \Rightarrow x = 2n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{N}$ d) $f'(x) = x^2 - 3 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

5. a) Nur geradzahlige Exponenten und Verschiebung nach oben.
b) Steigung der Geraden: $m = 2$; Steigung der Tangente: $f'(2) = 2$
c) $f''(-1) = 0$; $m = f'(-1) = 2$; $f(-1) = 0{,}75$; $b = y - mx = 2{,}75 \Rightarrow y = 2x + 2{,}75$
d) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}$
$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt; $f''(x_2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt; $f''(x_3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

6. $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$
Somit Rechtskrümmung auf $]-\infty; 2[$, Linkskrümmung auf $]2; \infty[$.
Streng monoton steigen auf $]-\infty; 1[$; $]3; \infty[$, streng monoton fallend auf $]1; 3[$.

7. (1): C (2): E (3):]A; C[und]E; G[(4):]A; D[(5): D (6): G (7):]C; E[(8):]D; G[

8. $f(x) \to B$ $g(x) \to D$ $h(x) \to A$ $k(x) \to C$

9. $f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow y_1 = -2x + 6;\ y_2 = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$; $y_1 = y_2 \Leftrightarrow x = 3;\ y_1(3) = y_2(3) = 0$

10. (I) Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ (II) Korrekt
(III) Korrekt (IV) Falsch; es ist auch ein Sattelpunkt möglich.
(V) Falsch; es ist auch ein Sattelpunkt möglich. (VI) Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$

11. a) An einem Extremum muss eine waagerechte Tangente vorliegen, d. h. das Kriterium $f'(a) = 0$ ist notwendig. Allerdings kann auch ein Sattelpunkt auftreten, d. h. ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Hinreichend wäre somit der sichere Ausschluss eines Wendepunktes, also zusätzlich $f''(a) \neq 0$.

b) Eine Gerade zeichnet sich durch eine konstante Steigung aus, d. h. $f'(x) = \text{konst.}$ für alle x. Dies ist sowohl eine hinreichende, als auch eine notwendige Bedingung. Weitere Möglichkeiten einer notwendigen Bedingung bestehen im Monotonieverhalten, d. h. $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle x.

12. a) Korrekt, eine Extremstelle hat immer eine waagerechte Tangente (notwendiges Kriterium).
b) Falsch, alle monotonen Graphen besitzen keinen Extrempunkt.
c) korrekt, das Krümmungsverhalten zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt muss sich ändern, also muss es einen Wendepunkt geben.
d) Falsch Gegenbeispiel: $f(x) = x^4$.
e) Korrekt, an einer Nullstelle sind alle Tangentensteigungen möglich.
f) Falsch, dies ist aufgrund des Verhaltens gegen $+\infty$ und $-\infty$ nicht möglich.
g) Korrekt, ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

13. a) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit den genannten Nullstellen hat die Form

$f(x) = c \cdot (x+1)(x+2)(x-4) = c \cdot \left(x^3 - x^2 - 10x - 8\right),\ c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$f'(x) = c \cdot \left(3x^2 - 2x - 10\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx -1{,}52;\ x_2 \approx 2{,}19;\ x_3 = \frac{1}{3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow\ x = \frac{1}{3}$

Die Funktion f hat bei x_1 und x_2 lokale Extremstellen, bei x_3 einen Wendepunkt.

b) Da c variabel ist, lassen sich die Funktionswerte an den Stellen nicht bestimmen.

14. a) $a = 0$ b) $a > -4$ und $a \neq 0$ c) $a > 0$

15. A: f(x) steigt in a mit Linkskrümmung
B: f(x) fällt in a mit Linkskrümmung
C: f(x) steigt in a mit Rechtskrümmung
D: f(x) fällt in a mit Rechtskrümmung

16. a) $f(x) = (x+4) \cdot (x-2)^2$ b) $f(x) = \frac{1}{6}(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$

17. a) Ab 5 Uhr (fast linearer) Anstieg bis zum Maximum um ca. 15 Uhr; danach immer steiler werdender Abfall bis 21 Uhr.

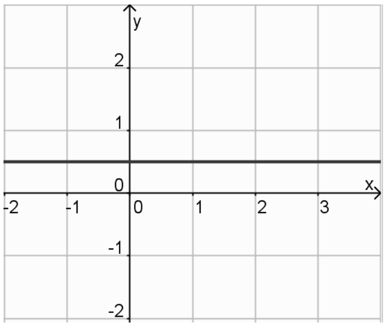
b) $f'(x) = 0$ im Definitionsintervall $\Rightarrow$ x=15,56. Also steigt die Temperatur von 5.00 Uhr bis 15.33 Uhr und fällt von 15.33 Uhr bis 21.00 Uhr.
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 7{,}78;\ f'(7{,}78) = 1{,}63$. Um 7.47 Uhr ist der größte Temperaturanstieg und er beträgt 1,63 °C pro Stunde.

c) Die Modellfunktion müsste abflachen und es müsste gelten: f(0) = f(24). Es gilt aber: f(0) = 8 und f(24) = 4,54.

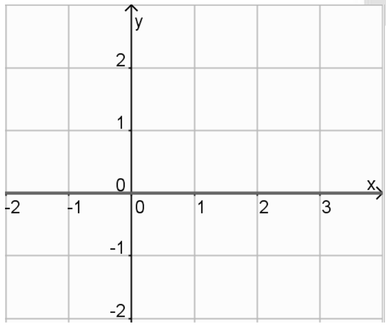
18. $s'_{Erde}(t) = 9{,}8\,t = 16{,}6 \Rightarrow t = 1{,}7 \Rightarrow s_{Erde}(1{,}7) = 14{,}1$; also Fallhöhe: 14,1 m.
$s'_{Mars}(t) = 3{,}72\,t = 16{,}6 \Rightarrow t = 4{,}5 \Rightarrow s_{Mars}(4{,}5) = 37{,}7$; also Fallhöhe: 37,7 m.
$s'_{Jupiter}(t) = 22{,}88\,t = 16{,}6 \Rightarrow t = 0{,}7 \Rightarrow s_{Jupiter}(0{,}7) = 5{,}6$; also Fallhöhe: 5,6 m

19. a) (A) Die Produktionskosten steigen mit der Stückzahl konstant an, d. h. die Änderung der Kosten ist konstant $f'(x) = 0{,}5$. Damit ist die Änderung der Änderung $f''(x) = 0$.

$f'(x) = 0{,}5$

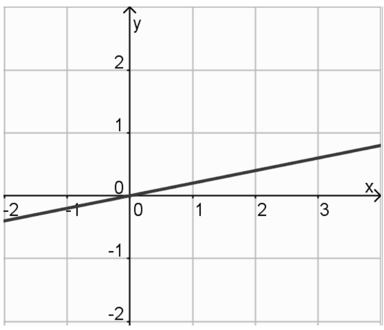


$f''(x) = 0$

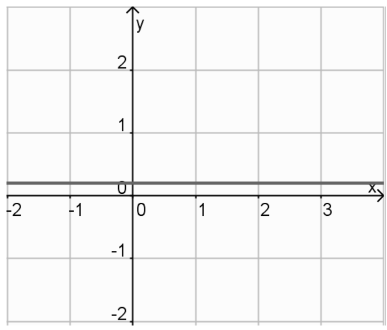


(B) Die Produktionskosten steigen mit der Stückzahl immer mehr an, die Änderung der Kosten wächst linear. Die Änderung der Änderung ist damit konstant.

$f'(x) = 0{,}2x$

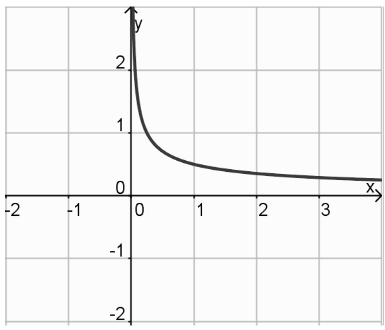


$f''(x) = 0{,}2x$

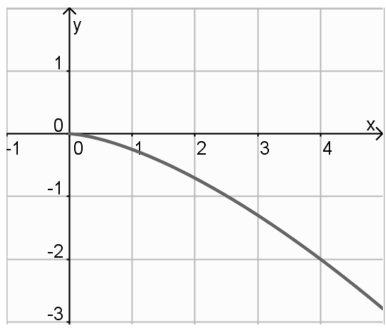


(C) Die Produktionskosten steigen mit der Stückzahl immer weniger an. Die Änderung der Kosten nimmt immer mehr ab. Also ist die Änderung der Änderung stets negativ und strebt gegen 0.

$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

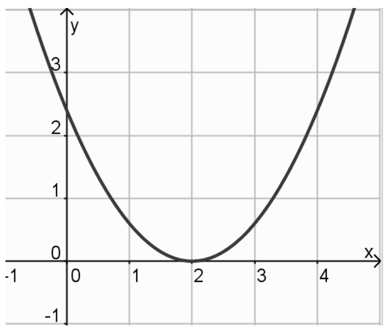


$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$

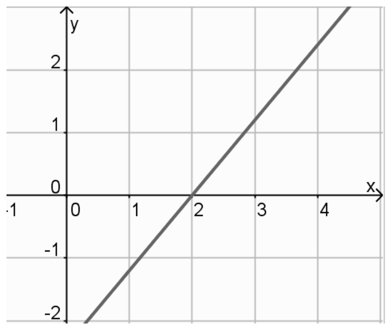


(D) Die Produktionskosten steigen bis zu einer bestimmten Stückzahl immer weniger an und steigen dann immer mehr an.

$f'(x) = 0{,}6x^2 - 2{,}4x + 2{,}4$

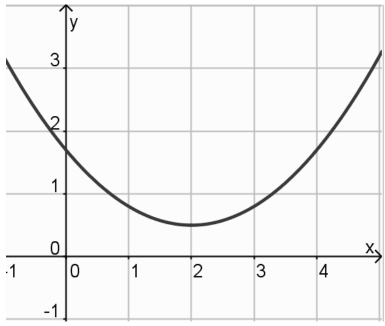


$f''(x) = 1{,}4x - 2{,}4$

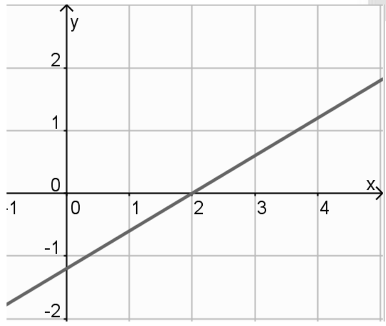


19. a) (E) Die Produktionskosten steigen bis zu einer bestimmten Stückzahl immer weniger an. Dann wachsen sie für wenige Stückzahlen näherungsweise linear und steigen ab dann immer mehr an.

$f'(x) = 0{,}3x^2 - 1{,}2x + 1{,}7$



$f''(x) = 0{,}6x - 1{,}2$



b) Unter „üblichen“ Bedingungen scheint Funktion (C) am sinnvollsten zu sein, da durch Gewährung von z. B. Massenrabatten und Einsparungen in der Massenproduktion die Produktionskosten immer weniger steigen sollten. Allerdings kann man sich auch Situationen vorstellen, in denen die Funktion (D) und (E) sinnvolle Modellierungen wären. Beispielsweise könnte man die Beschränkung von Rohstoffen (z.B. Energie), deren Preis ab einer gewissen Menge stark ansteigt, in Betracht ziehen.

20. Bezeichnet man die Seite parallel zum Fluss mit y und den Abstand von y zum Fluss mit x, ergeben sich folgende Gleichungen:

Preis: $3 \cdot 5 \cdot x + 6 \cdot y = 1500 \Rightarrow x = 100 - \frac{6}{15} \cdot y$

Fläche: $A(y) = x \cdot y = 100y - \frac{6}{15} \cdot y^2$; $A'(y) = 0 \Rightarrow y = 125 \Rightarrow x = 50$

21. a) Eine waagerechte Tangente ist nur in einem Extremum oder einem Sattelpunkt möglich. Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt, in dem Punkt hat der Funktionsgraph keine Krümmung. In einem Hochpunkt ist der Graph rechtsgekrümmt, in einem Tiefpunkt linksgekrümmt.

b) $f(x) = x^3$

c) Ein Polynom 3. Grades kann die Formen $P_1(x) = k \cdot (x - a)^3$; $P_2(x) = k \cdot (x - a)^2 \cdot (x - b)$; $P_3(x) = k \cdot (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ besitzen, mit den jeweiligen Nullstellen a, b und c. Somit ist die Anzahl der Nullstellen auf maximal drei begrenzt.
Beispiel für 2 Nullstellen: $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$.

d) Z. B. $f(x) = -x^2 + 3$; $f'(x) = -2x$ auf dem Intervall $]-\infty; 0[$

22. a) Waagerechte Tangente: $f'(x) = 0$; linksgekrümmt: $f''(x) > 0$

b) Wendepunkt allgemein; Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente); evtl. Unterscheidung in Übergang von Links- in Rechtskrümmung oder umgekehrt.

c) Nein, da das Krümmungsverhalten zwischen Hoch- und Tiefpunkt wechseln muss. Die Anzahl der Wendepunkte dazwischen ist also immer ungerade.

d) An welchen Stellen der Funktion f liegt ein Extremum oder ein Sattelpunkt vor oder handelt es sich um eine konstante Funktion?

e) Ja, z. B. $f(x) = x^4$.

f) Bei $f(x) = x^3$ tangiert und schneidet die Tangente den Graphen in 0. Die Aussage trifft jedoch für alle Tangenten an den Graphen von $f(x) = x^2$ zu.

23. a) Regel: $f(x) = a \cdot x^n$; $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$; Beispiel: $f(x) = 3 \cdot x^3$; $f'(x) = 9 \cdot x^2$

b) Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$; nach Regel von oben: $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$; aber: $e^x \neq x \cdot e^{x-1}$

c) $f(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$, mit $g(x) = (x - 1)$ und $h(x) = x + 2 \Rightarrow g'(x) = 1$ und $h'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) * h'(x) = 1$
Somit $f'(x) \neq g'(x) \cdot h'(x)$.

24. *Vermutung:* Die Wendestelle liegt immer mittig zwischen den Extrempunkten.
Algebraischer Beweis: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Extrema bei $x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$; Wendepunkt bei $x_3 = \frac{-b}{3a}$

Mitte zwischen x_1 und x_2: $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{3a} = x_3$

Geometrische Argumentation über die Parabelform der Ableitung und deren Symmetrie: Die Extremstellen sind Nullstellen der Ableitung und die Wendestelle ist Extremstelle der Ableitungsfunktion. Da die Ableitungsfunktion eine Parabel ist, liegt die Extremstelle immer mittig zwischen den Nullstellen.

25. Seien die drei Nullstellen a, b und c. Dann gilt: $f(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ und für die Ableitung:
$f'(x) = (x - b) \cdot (x - c) + (x - a) \cdot (x - c) + (x - a) \cdot (x - b)$.

Somit gilt für die Tangente in der Mitte der Nullstellen a und b:

$h(x) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Einsetzen und geschickt zusammenfassen ergibt als Tangentengleichung

$h(x) = \frac{1}{4}a^2c - \frac{1}{2}abc + \frac{1}{4}b^2c - \frac{1}{4}a^2x + \frac{1}{2}abx - \frac{1}{4}b^2x$

Für x = c heben sich die ersten drei Terme gegen die letzten drei weg, d.h. die Tangente hat ebenfalls die Nullstelle c. Gleiche Überlegungen gelten für das Nullstellenpaar b und c.

Bestell-Nr. 85480