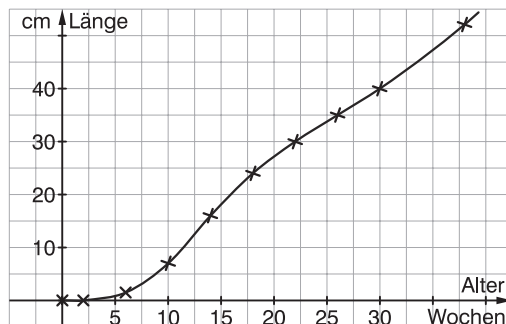


Lösungen

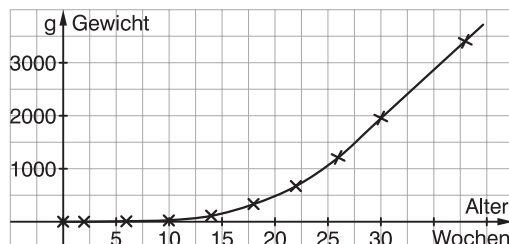
2.1 Wachstumsvorgänge beschreiben und analysieren

39

1. a) Um den Wachstumsprozess anschaulich darzustellen, muss eine Entscheidung getroffen werden: Auf eine exakte Darstellung der sehr kleinen Anfangswerte wird verzichtet, um eine aussagekräftige Darstellung des gesamten Prozesses zu ermöglichen.



- b) Die Änderungen im Längenwachstum kann man hier anhand des absoluten Zuwachses oder anhand des prozentualen Zuwachses innerhalb von jeweils 4 Wochen beurteilen. Absolut ist das Wachstum mit 9 cm von der 10. zur 14. Woche am größten, prozentual ist das Wachstum in den ersten beiden Wochen mit über 300 % am größten.

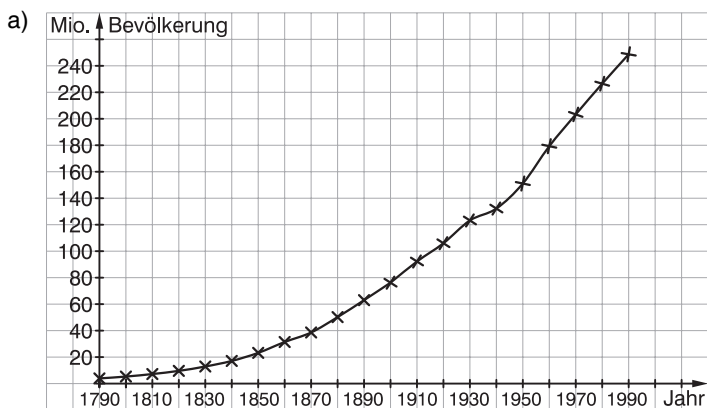


- c) Fragen:
 Verhält sich die Gewichtszunahme ähnlich wie das Längenwachstum? Gibt es zu gleichen Zeiten schnellere und weniger schnelle Zuwächse?
 Bleibt das Verhältnis Länge zu Gewicht über längere Zeiträume konstant? ...
 Kommentar: Hier kann auch auf die Problematik eingegangen werden, die bereits in Band 9 im Themengebiet *Zentrische Streckung – Ähnlichkeit* behandelt wurde: Beim Längenwachstum geht die Länge linear ein, bei der Gewichtszunahme kubisch.

40

2.

Jahr	Bevölkerung in Mio.	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs
1790	3,93		
1800	5,31	1,38	35,1%
1810	7,24	1,93	36,3%
1820	9,64	2,40	33,1%
1830	12,87	3,23	33,5%
1840	17,07	4,20	32,6%
1850	23,19	6,12	35,9%
1860	31,44	8,25	35,6%
1870	38,56	7,12	22,6%
1880	50,19	11,63	30,2%
1890	62,98	12,79	25,5%
1900	76,21	13,23	21,0%
1910	92,23	16,02	21,0%
1920	106,02	13,79	15,0%
1930	123,20	17,18	16,2%
1940	132,16	8,96	7,3%
1950	151,13	18,97	14,4%
1960	179,33	28,20	18,7%
1970	203,30	23,97	13,4%
1980	226,54	23,24	11,4%
1990	248,71	22,17	9,8%



- b) Der absolute Zuwachs an Bevölkerung war mit 28,2 Mio. Menschen in der Dekade 1950 - 1960 am größten.

40

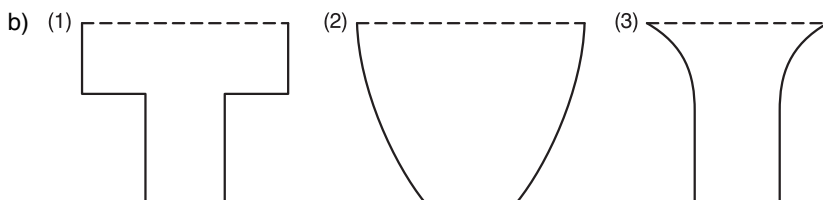
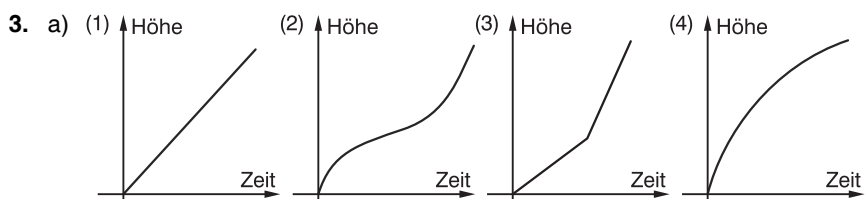
2. c) Es lassen sich 4 Phasen ausmachen:
 Bis 1860 lagen die Zuwächse pro Dekade immer über 30 %;
 von 1860 bis 1910 lag das Wachstum zwischen 20 % und 30 %;
 von 1910 bis 1980 sinkt das Wachstum auf Werte zwischen 10 % und 20 %, Ausnahme ist die Dekade des 2. Weltkrieges mit nur 7,3 % Wachstum;
 von 1980 bis 1990 fiel das Wachstum auf unter 10 %.
- d) Wenn man den Wachstumsfaktor von 9,8 % der letzten Dekade zugrunde legt, erhält man folgende Wachstumsfunktion:

$$f(t) = 248,71 \cdot 1,098^t \quad (t \text{ ist eine Dekade})$$

Damit käme man zu folgenden Bevölkerungsprognosen:

Jahr	2000	2010	2020
Bevölkerung in Mio.	273,08	299,85	329,23

- e) Im Jahr 2005 betrug die Bevölkerung der USA rund 295,8 Mio. (Quelle: U. S. Census Bureau).
 Die Wachstumsrate stieg also nach 1990 wieder an.



4. a)

Seitenlänge a (in m)	Umfang u (in m)	Flächeninhalt A (in m ²)
0	0	0
10	40	100
20	80	400
30	120	900
40	160	1 600
50	200	2 500

Der Umfang wächst linear um jeweils 40 m.

Der Flächeninhalt wächst quadratisch. Der Zuwachs wird von Stufe zu Stufe größer; er beträgt jeweils $20(a - 5) \text{ m}^2$.

- b) Wenn die Seitenlänge um 10 % wächst, wird der Umfang um 10 % und der Flächeninhalt um 21 % ($1,1^2 = 1,21$) größer.

42

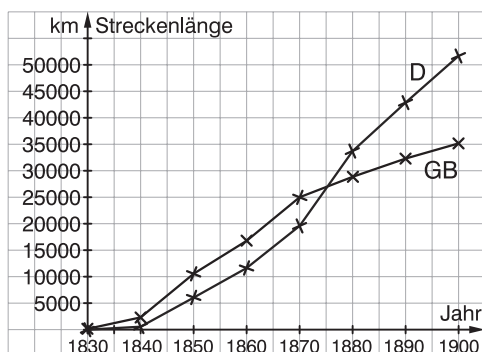
5. Änderung des Bremsweges:

absolut: $b(110) - b(100) = 121 - 100 = 21 \text{ m}$ prozentual: $\frac{21}{100} = 0,21 = 21 \%$

Während mit zunehmender Geschwindigkeit die absolute Veränderung des Bremsweges zunimmt, nimmt die prozentuale Veränderung ab. (Der jeweilige Grundwert wird immer größer.)

6. a) Der Aufbau eines Streckennetzes setzte in Deutschland etwas später ein als in Großbritannien.

Erst etwa 1875 hatte Deutschland hinsichtlich der Streckenlänge Großbritannien eingeholt, baute danach jedoch mit deutlich mehr Streckenkilometern pro Dekade einen wachsenden Vorsprung auf.



Kommentar: Hier ist ein Bezug zur deutschen Geschichte möglich, denn nach dem deutsch-französischen Krieg 1870/71 und der darauf folgenden Reichsgründung waren die Rahmenbedingungen für das Einsetzen des Eisenbahnbooms im Deutschen Reich sehr günstig.

Jahr	GB	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs	Wachstumsfaktor
1830	152 km			
1840	2 308 km	2 156 km	1 418,4%	15,1842
1850	10 653 km	8 345 km	361,6%	4,6157
1860	16 768 km	6 115 km	57,4%	1,5740
1870	24 999 km	8 231 km	49,1%	1,4909
1880	28 854 km	3 855 km	15,4%	1,1542
1890	32 297 km	3 443 km	11,9%	1,1193
1900	35 165 km	2 868 km	8,9%	1,0888

42

6. b)

Jahr	D	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs	Wachstumsfaktor
1830	0 km			
1840	549 km	549 km		
1850	6 044 km	5 495 km	1 000,9%	11,0091
1860	11 633 km	5 589 km	92,5%	1,9247
1870	19 575 km	7 942 km	68,3%	1,6827
1880	33 711 km	14 136 km	72,2%	1,7221
1890	42 869 km	9 158 km	27,2%	1,2717
1900	51 678 km	8 809 km	20,5%	1,2055

7. Die Krankheit SARS wurde über einen Zeitraum von etwa 4 Monaten im Frühjahr 2003 beobachtet und die Anzahl der Infektionen protokolliert. Zu Beginn der Beobachtung gab es etwa 500 Fälle. In den ersten drei Wochen nahmen die erfassten Fälle sprunghaft zu, was darauf zurückzuführen ist, dass die Methoden zur Erfassung und die Sorgfalt verbessert wurden. Im Laufe des Aprils wuchs die Zunahme der erfassten Infektionen täglich. Ab Ende April änderte sich das Geschehen. Aufgrund der nun greifenden Vorsorgemaßnahmen schwächte sich die Zunahme der Infektionen ab. Vom 8. Juni an blieb die Anzahl der erfassten Infektionen bei etwa 8500 fast konstant.

43

8. Winkelsumme in Vielecken (Hinweis: Die Formeln sind in der Aufgabe nicht gefordert.)

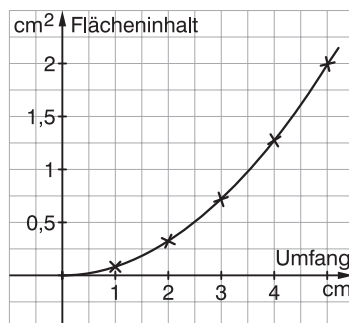
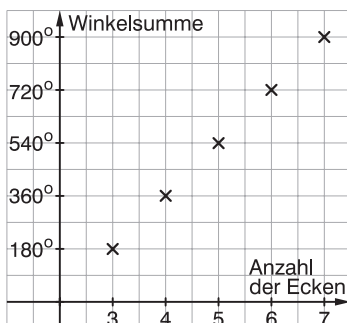
Anzahl der Ecken	Summe der Innenwinkel	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs	Wachstumsfaktor
3	180°			
4	360°	180°	100 %	2,00
5	540°	180°	50 %	1,50
6	720°	180°	33,3 %	1,33
7	900°	180°	25 %	1,25
...
n	$(n - 2) \cdot 180^\circ$	180°	$\left(\frac{1}{n-3}\right) \cdot 100 \%$	$\left(1 + \frac{1}{n-3}\right) = \frac{n-2}{n-3}$

(Graph hierzu auf der nächsten Seite.)

43

8. Flächeninhalt des Kreises in Abhängigkeit vom Umfang

Umfang (in cm)	Radius (in cm)	Flächeninhalt (in cm ²)	absoluter Zuwachs	prozent. Zuwachs	Wachstums- faktor
1	$\frac{1}{2\pi} \approx 0,159$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0,080$			
2	$\frac{2}{2\pi} \approx 0,318$	$\frac{4}{4\pi} \approx 0,318$	$\frac{3}{4\pi} \approx 0,239$	300 %	4,00
3	$\frac{3}{2\pi} \approx 0,477$	$\frac{9}{4\pi} \approx 0,716$	$\frac{5}{4\pi} \approx 0,398$	125 %	2,25
4	$\frac{4}{2\pi} \approx 0,637$	$\frac{16}{4\pi} \approx 1,273$	$\frac{7}{4\pi} \approx 0,557$	77,8 %	1,778
5	$\frac{5}{2\pi} \approx 0,796$	$\frac{25}{4\pi} \approx 1,989$	$\frac{9}{4\pi} \approx 0,716$	56,25 %	1,5625
...
n	$\frac{n}{2\pi}$	$\frac{n^2}{4\pi}$	$\frac{2n-1}{4\pi}$	$\frac{2n-1}{(n-1)^2} \cdot 100 \%$	$1 + \frac{2n-1}{(n-1)^2}$



Umfang eines Quadrates

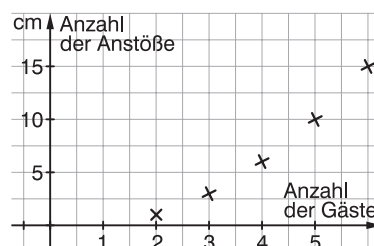
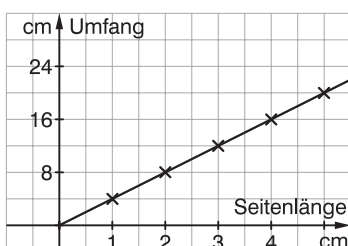
Seitenlänge (in cm)	Umfang (in cm)	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs	Wachstums- faktor
1	4			
2	8	4	100 %	2,00
3	12	4	50 %	1,50
4	16	4	33,3 %	1,33
5	20	4	25 %	1,25
...
n	4n	4	$\left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot 100 \%$	$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{n}{n-1}$

(Graph hierzu auf der nächsten Seite.)

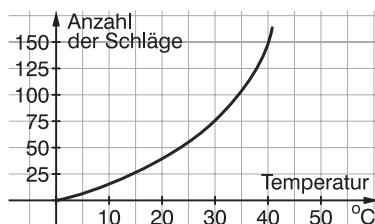
43

8. „Anstoßen“ beim Sektempfang

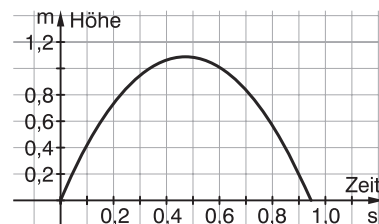
Anzahl der Gäste	Anzahl der Anstöße	absoluter Zuwachs	prozentualer Zuwachs	Wachstumsfaktor
2	1			
3	3	2	200 %	3,00
4	6	3	100 %	2,00
5	10	4	66,7 %	1,667
6	15	5	50 %	1,5
...
n	$\frac{n(n-1)}{2}$	n - 1	$\frac{2}{n-2} \cdot 100 \%$	$\left(1 + \frac{2}{n-2}\right) = \frac{n}{n-2}$



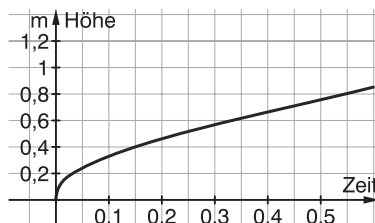
9. (1) Herzschlag einer Erdkröte



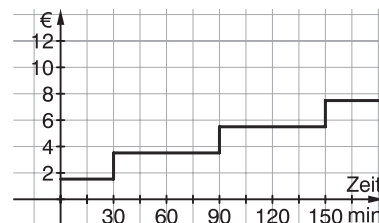
(2) Weitsprung von Bob Beamon



(3) Wassertank



(4) Parkhausgebühr



10. $f(x) = 2x + 1$ ist eine lineare Funktion; ihr Graph ist eine Gerade. $f(x)$ wächst unbeschränkt, wobei der absolute Zuwachs pro x -Einheit konstant ist. Der prozentuale Zuwachs pro x -Einheit wird kleiner, weil jeweils von einem höheren Grundwert ausgegangen wird.

Es darf also aus einem ständig kleiner werdenden prozentualen Zuwachs nicht geschlossen werden, dass das Wachstum sich verlangsamt oder zum Erliegen kommt.

44

11. a) Dargestellt wird der prozentuale Anteil der Teilzeitbeschäftigten an der Gesamtheit aller Arbeitnehmer.
In der Grafik sind in der Horizontalen die Jahre abgetragen, in der Vertikalen die Prozentwerte. Der Wachstumsprozess wird durch die Angabe von Prozentwerten im Zweijahresrhythmus beschrieben.
Das Wachstum wird zunächst von Angabe zu Angabe größer (ähnlich einem schwachen exponentialen Wachstum), in der zweiten Hälfte des Beobachtungszeitraumes schwächt sich das Wachstum ab.
- b) Vermutlich wird sich die Zunahme weiter abschwächen und auf einem Niveau von 10 % bis 12 % stagnieren, weil der Einsatz von Teilzeitkräften in der Wirtschaft aus Gründen der Arbeitsabläufe und aus Kostengründen (vergleichsweise hohe Lohnnebenkosten) vermutlich nur begrenzt möglich ist.
12. Der Kursverlauf von Aktienkursen ist in der Regel so komplex und wechselhaft, dass eine Beschreibung mit Worten kaum möglich ist.

45

13. (1) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
C: Die Wertemenge von $f(x)$ ist $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
- (2) $f(x) = \sqrt{x}$
A: Die Funktion ist monoton wachsend.
- (3) $f(x) = \log_2 x$
A: Die Funktion ist monoton wachsend.
- (4) $f(x) = x - 3$
Keine der Aussagen trifft zu.
- (5) $f(x) = 0,5x^2$
Keine der Aussagen trifft zu.
- (6) $f(x) = 0,5 \cdot 1,2^x$
B: $f(x)$ ist eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 1,2, d. h. Wachstum von 20 %.
14. Lineare Funktion: $f(x) = 2,5x$
Exponentialfunktion: $f(x) = 1,3^x$
Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_b x$
Trigonometrische Funktion: $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

15. a)

h (in km)	0	10	20	30	40	50
G(h) (in N)	800	797,5	795,0	792,5	790,0	787,6

h (in km)	60	70	80	90	100
G(h) (in N)	785,1	782,7	780,3	777,9	775,5

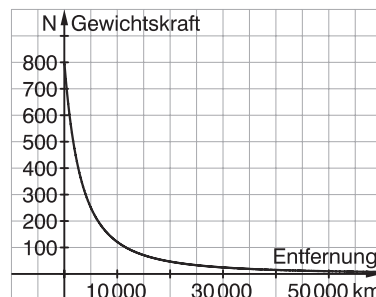
b)

h (in km)	10	100	1 000	10 000	100 000
G(h) (in N)	797,5	775,5	597,6	121,1	2,87

$\xrightarrow{-2,8\%}$ $\xrightarrow{-23\%}$ $\xrightarrow{-80\%}$ $\xrightarrow{-98\%}$

45

15. c) Die Gewichtskraft wird mit zunehmender Höhe zunächst sehr stark reduziert, später nimmt sie nur noch wenig ab und nähert sich dem Wert 0, ohne ihn zu erreichen. Die x-Achse ist Asymptote des Graphen. Der Graph ist ein Hyperbel-Ast. Hinweis: Die Schwerelosigkeit hat nichts mit der Abnahme der Gewichtskraft zu tun.



16.	Zeit t	30 s	1 min	2 min
	Abstand d (in km)	14,52	33,54	85,08

Der Abstand von der Erde wächst quadratisch mit der Zeit.

46

17. Die Texte bieten interessante Hintergrundinformationen zum Themenkomplex AIDS. Sie können etwa zum Ausgangspunkt weitergehender Recherchen genutzt werden oder als Grundlage für Schülerreferate dienen. Hierfür sind die aktuellen Ressourcen des Robert-Koch-Institutes (www.rki.de) oder der UNO (www.unaids.org) unentbehrlich.

Die *Prävalenz* ist eine epidemiologische Kennzahl und sagt aus, wie viele Individuen einer bestimmten Population an einer bestimmten Krankheit erkrankt sind. Die Prävalenzrate wird bestimmt durch die Zahl der Erkrankten im Verhältnis zur Zahl der Untersuchten.

Die *Inzidenz* wird in der medizinischen Statistik definiert als die Anzahl der Neuerkrankungen in einer Population an einer bestimmten Krankheit in einem bestimmten Zeitraum.

Beispiel: Auftreten von 76 Myokardinfarkten bei 2000 rauchenden Männern im Alter von 60 bis 80 Jahren während einer Beobachtungszeit von 1 Jahr.

Inzidenz = $\frac{76}{2000} = 0,038$, also 3,8 % pro Jahr.

Zur Grafik:

Vertikale Skala links:

Blaue Kurve: Anzahl der jährlich HIV-Neuinfizierten

Rote Kurve: Anzahl der jährlichen Neuerkrankungen an AIDS

Grüne Kurve: Anzahl der jährlichen HIV/AIDS-Todesfälle

Vertikale Skala rechts:

Gelbe Fläche: Kumulierte Anzahl der HIV-Infizierten

Orange Fläche: Kumulierte Anzahl der an AIDS Erkrankten

2.2 Wachstumsvorgänge und Iterationen – Exponentielles und beschränktes Wachstum

47

1. a) Größte Gewichtszunahme:
absolut in den Jahren 5 und 7 mit jeweils 310 kg
relativ im Jahr 1 mit 307 %

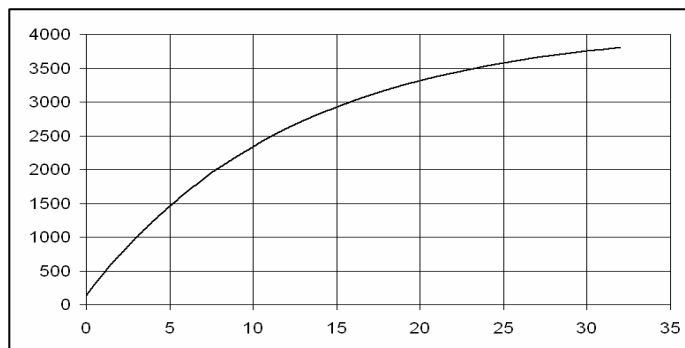
47

1. b)

Jahr	Gewicht (in kg) real	Gewicht nach Iterationsgleichung	Abweichung absolut	Abweichung prozentual
0	140	140	0	0 %
1	430	449	-19	4 %
2	710	734	-24	3 %
3	880	996	-116	13 %
4	1 060	1 238	-178	17 %
5	1 370	1 462	-92	7 %
6	1 480	1 667	-187	13 %
7	1 790	1 857	-67	4 %
8	1 980	2 032	-52	3 %
9	2 200	2 193	7	0 %
10	2 350	2 342	8	0 %

Die Abweichung der Iterationswerte von den echten Werten ist zum Teil recht hoch. Mit zunehmenden Alter scheinen sich die Werte allerdings gut anzunähern.

c) Die Grafik stellt die Modellwerte dar:



48

2. a) In 45 Minuten wächst die Erdbevölkerung um etwa 6660 Menschen.
 b) Monatliches Wachstum (30 Tage): $x_{n+1} = x_n + 6\,399\,600$
 Jährliches Wachstum (365 Tage): $x_{n+1} = x_n + 77\,788\,800$
3. a) 46 gesunde und 4 kranke Tiere treffen aufeinander. Jedes der 4 kranken Tiere kann mit jedem der 46 gesunden Tiere direkten Kontakt haben; es sind also $4 \cdot 46 = 184$ ansteckungsrelevante Kontakte möglich. Man geht davon aus, dass es in 1 % der möglichen Fälle tatsächlich zu einer Ansteckung kommt. Das bedeutet, dass sich an diesem Tag etwa 2 Tiere infizieren. Nach diesem Tag gibt es also wahrscheinlich 6 kranke und 44 gesunde Tiere.
 b) Von Tag zu Tag ändern sich die Anzahlen der kranken und der gesunden Tiere, und daraus resultierend die Anzahl der ansteckungsrelevanten Kontakte. Unverändert bleibt die Annahme, dass es in 1 % der Kontakte zur Infektion kommt.

48

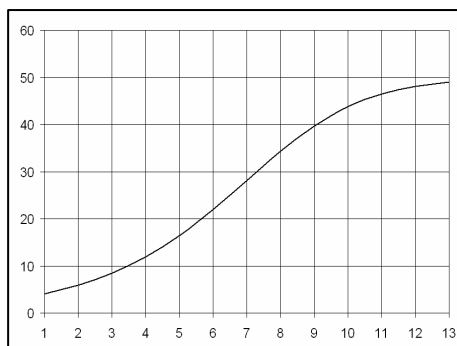
3. c) Iterationsgleichung für die Anzahl der erkrankten Tiere:

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{\substack{\text{bisher} \\ \text{erkr. Tiere}}} + 0,01 \cdot \underbrace{x_n (50 - x_n)}_{\substack{\text{mögliche Kontakte} \\ \text{1 \% davon}}} = \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{neue Anzahl der kranken Tiere}}$$

d)

Tage	mögl. Kontakte	neue Erkrankungen	Erkrankte	aufgerundet	Gesunde
1	184	1,84	4	4	46
2	257,89	2,58	5,84	6	44
3	350,07	3,50	8,42	9	41
4	453,90	4,54	11,92	12	38
5	552,05	5,52	16,46	17	33
6	615,87	6,16	21,98	22	28
7	615,15	6,15	28,14	29	21
8	538,71	5,39	34,29	35	15
9	409,60	4,10	39,68	40	10
10	272,59	2,73	43,77	44	6
11	162,82	1,63	46,50	47	3
12	90,16	0,90	48,13	49	1
13	47,65	0,48	49,03	50	0

- e) Die Anzahl der erkrankten Tiere wächst in den ersten Tagen nur langsam, dann immer stärker, bis sie sich der Gesamtanzahl der Tiere nähert. Dann flacht der Graph ab und erreicht schließlich am 13. Tag die Zahl 50, was bedeutet, dass alle Tiere erkrankt sind.



48

3. f) Neue Iterationsgleichung für die Anzahl der erkrankten Tiere:

$$x_{n+1} = x_n + 0,02 \cdot x_n (50 - x_n)$$

Tage	mögl. Kontakte	neue Erkrankungen	Erkrankte	aufgerundet	Gesunde
1	184	3,68	4	4	46
2	325,02	6,50	7,68	8	42
3	507,94	10,16	14,18	15	35
4	624,56	12,49	24,34	25	25
5	485,04	9,70	36,83	37	13
6	161,41	3,23	46,53	47	3
7	11,97	0,24	49,76	50	0

Bereits am 7. Tag sind alle Tiere erkrankt.

50

4. a) lineares Wachstum

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	8	10	12	14	16	18	20

- b) lineares Wachstum (
- $x_{n+1} = \dots = x_n + 3$
-)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	6	9	12	15	18	21	24

- c) exponentielles Wachstum (
- $x_{n+1} = \dots = 1,5 \cdot x_n$
-)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	120	126	132	139	146	153	161

- d) exponentielles Wachstum (
- $x_{n+1} = \dots = 1,43 \cdot x_n$
-)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	200	286	409	585	836	1 196	1 710

- e) exponentielles Wachstum

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0,05	0,20	0,80	3,20	12,80	51,20	204,80

- f) weder linear noch exponentiell

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	32	6,00	3,16	2,68	2,58	2,57	2,56

50

5. a) $x_{n+1} = 3 \cdot x_n$ $x_0 = 3$ b) $x_{n+1} = x_n + 1,5$ $x_0 = 2$
 c) $x_{n+1} = 2,5 \cdot x_n$ $x_0 = 4$ d) $x_{n+1} = x_n + 4$ $x_0 = 0,5$
 e) $x_{n+1} = 1,2 \cdot x_n$ $x_0 = 100$ f) $x_{n+1} = 5 \cdot x_n$ $x_0 = 0,1$

6.

n	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
1	1	1	2
2	1	2	3
3	2	3	5
4	3	5	8
5	5	8	13
6	8	13	21
7	13	21	34
8	21	34	55
9	34	55	89
10	55	89	144
11	89	144	

7. $x_{n+1} = 1,015 \cdot x_n$ $x_0 = 9,8$ Mio.

n	0	1	2	3	4	5
x_n	9,8	9,947	10,096	10,248	10,401	10,557

$$x_{n+1} = x_n + 5 \quad x_0 = 260$$

n	0	1	2	3	4	5
x_n	260	265	270	275	280	285

8. a) $x_{n+1} = 1,4 \cdot x_n$
 b) Es handelt sich um exponentielles Wachstum. Nach t Wochen ist folgende Fläche bewachsen: $x_t = 1,4 \cdot (1,4 \cdot (1,4 \cdot \dots (1,4 \cdot x_0) \dots)) = 1,4^t \cdot x_0$
 Der Zuwachs ist proportional zum Anfangswert (Ausgangsfläche).

$$c) \quad x_t = 1,4^t \cdot x_0 = 34\,000 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,4} \left(\frac{34\,000}{x_0} \right)$$

$$x_t = 1,4^t \cdot x_0 = 68\,000 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,4} \left(\frac{68\,000}{x_0} \right)$$

Fläche (in km ²)	34 000	34 000	34 000	68 000	68 000	68 000
Ausgangsfläche (in m ²)	1	10	100	1	10	100
Zeit t (in Wochen)	31,0	24,2	17,3	33,1	26,2	19,4

- d) Umwelteinflüsse wie Wetter, Temperaturschwankungen, Eingriffe des Menschen, „Sättigung“ der Flächen u. a. verhindern, dass der Wachstumsfaktor über einen längeren Zeitraum konstant bleibt.

52

9. a) logistisches Wachstum

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	4	7,84	15,07	27,86	47,96	72,92	92,67	99,46	100,00

b) exponentielles Wachstum

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	4	4,4	4,84	5,32	5,86	6,44	7,09	7,79	8,57

c) einfach beschränktes Wachstum

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	5,75	9,31	11,98	13,99	15,49	16,62	17,46	18,10

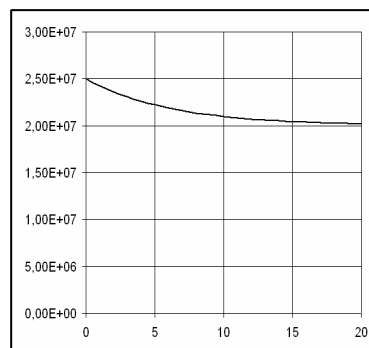
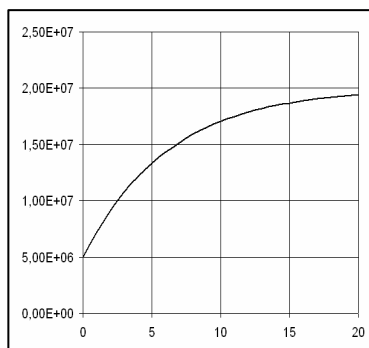
d) Durch algebraische Umformung der Iterationsgleichung c) findet man, dass es sich bei c) und d) um dieselbe Iteration handelt.

10. a) $x_{n+1} = 0,85 \cdot x_n + 3\,000\,000$ (n in Jahren)

Jahr	Wassermenge (in m ³)	c) Wassermenge (in m ³)
0	5.000.000	25.000.000
1	7.250.000	24.250.000
2	9.162.500	23.612.500
3	10.788.125	23.070.625
4	12.169.906	22.610.031
5	13.344.420	22.218.527
6	14.342.757	21.885.748
7	15.191.344	21.602.885
8	15.912.642	21.362.453
9	16.525.746	21.158.085
10	17.046.884	20.984.372
11	17.489.851	20.836.716
12	17.866.374	20.711.209
13	18.186.418	20.604.527
14	18.458.455	20.513.848
15	18.689.687	20.436.771
16	18.886.234	20.371.255
17	19.053.299	20.315.567
18	19.195.304	20.268.232
19	19.316.008	20.227.997
20	19.418.607	20.193.798

52

10. b) Umformung der Iterationsgleichung: $x_{n+1} = x_n + 0,15 \cdot (20\,000\,000 - x_n)$
 Es handelt sich um einfach beschränktes Wachstum mit der Obergrenze $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.
- c) Die jährliche Zuflussmenge an Wasser ist 15 % von $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Wenn die Ausgangswassermenge kleiner ist, füllt sich der See bis zu dieser Menge auf, wenn die Ausgangswassermenge größer ist, nimmt die Wassermenge im See bis auf $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ ab.



Mathe-Kiste

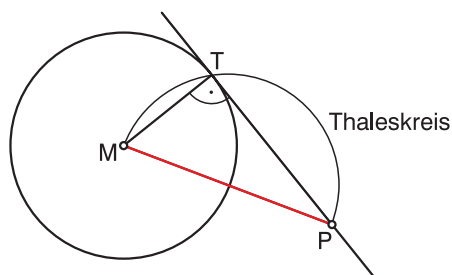
- $f(x)$ ist die Funktionsgleichung einer Parabel mit den Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 20$ und modelliert insofern die abgebildete Parabel. $a = -0,04$
 $f(x) = -0,04x(x - 20) = -0,04x^2 + 0,8x$

- Es gibt 36 mögliche Ergebnisse beim Wurf mit zwei Würfeln. In folgenden 5 Fällen ist die Augensumme 8: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der möglichen Treffer}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{5}{36}$$

- Volumen der Röhre: $V = (0,8^2 - 0,75^2) \cdot \pi \cdot 2,5 \approx 0,6087 \text{ m}^3$
 Masse: $G = V \cdot 2,3 \approx 1,4 \text{ t}$

•



53

11. a) Meldung links:
Ziel: monatlich 15 Einheiten verkaufen.
Meldung rechts:
Ziel: in jedem Quartal 15 % des Bestandes verkaufen.
Gesamtbestand am Anfang: 5 800 Exemplare
- b) Meldung links:
 $x_{n+1} = x_n + 15$ (n in Monaten)
Meldung rechts:
 $x_{n+1} = x_n - 0,15 \cdot x_n = 0,85 \cdot x_n$ $x_0 = 5\,800$ (n in Quartale)
12. (1) exponentielles Wachstum
Wenn man mithilfe des Graphen eine Wertetabelle aufstellt, stellt man fest, dass der Quotient aufeinanderfolgende Zahlen (Ablese-Ungenauigkeit!) konstant ist.
- (2) lineares Wachstum mit dem Zuwachs 0
- (3) einfaches beschränktes Wachstum
- (4) logistisches Wachstum
Der Wachstumsfaktor wird kleiner und sogar negativ.
13. a) In der Grafik ist dargestellt, wie sich das Tarifniveau (Löhne und Gehälter) in den neuen Bundesländern seit 1991 an die Verhältnisse in den westdeutschen Ländern angleicht. In der ersten Hälfte der Neunziger fand die Angleichung von einem Ausgangswert von 60 % recht schnell statt. Ab Mitte der Neunziger schwächte sich der Zuwachs deutlich ab und liegt 2003 bei 93,4 %. Der Grafik kann man folgende Werte entnehmen:

Jahr	1991	1994	1996	2000	2003
Prozentsatz	60%	84%	89%	92%	93,4%

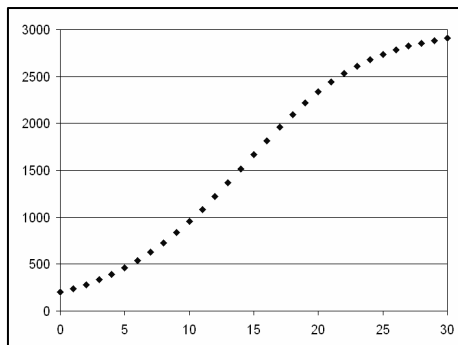
- b) Es liegt vermutlich ein einfach beschränktes Wachstum vor, da es eine Obergrenze (100 %) gibt.
- c) $x_{n+1} = x_n + 0,15 \cdot (1 - x_n) = 0,85 \cdot x_n + 0,15$ mit $x_0 = 0,6$ ist eine Iterationsvorschrift, die den Anfangswert und den Wert für 2003 trifft, allerdings in den ersten Jahren weniger stark wächst.

Jahr	91	92	93	94	95	96	97	98	99
Prozent	60%	66%	71%	75%	79%	82%	85%	87%	89%

Jahr	00	01	02	03
Prozent	91%	92%	93%	94%

54

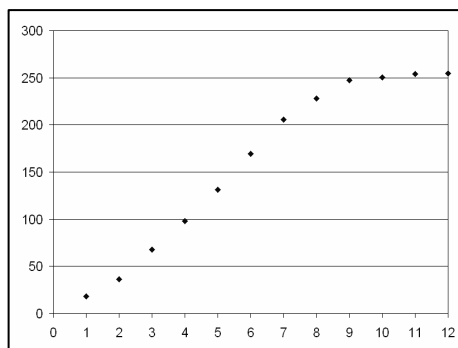
14. Die Modellierung über einen Zeitraum von 30 Jahren führt zu folgendem Graphen:



Die Grafik zeigt, dass die Zahl der Fische die Grenze 3000 nicht überschreitet. Zudem beträgt das anfängliche Wachstum etwa 20%, da der Minuend in der Iterationsgleichung anfangs sehr klein und daher zu vernachlässigen ist. Durch Umformen der Gleichung lässt sich zeigen, dass es sich hier um ein logistisches Modell handelt:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= 1,2x_n - \frac{0,2}{3000}x_n^2 \\
 &= x_n + 0,2x_n - \frac{0,2}{3000}x_n^2 \\
 &= x_n + 0,2x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{3000}x_n\right) \\
 &= x_n + \frac{0,2}{3000}x_n \cdot (3000 - x_n)
 \end{aligned}$$

15. a)



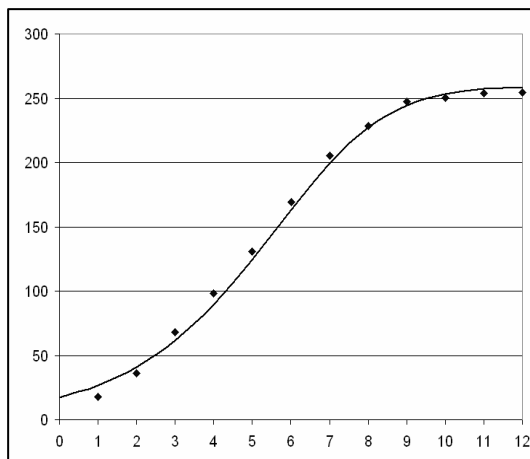
- b) Zu einer guten Näherung führt die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n + 0,0023 \cdot x_n \cdot (260 - x_n) \text{ mit } x_0 = 17$$

54

15. b)

Woche	Höhe gemessen	Höhe nach Iteration
0	?	17
1	17,93	27
2	36,36	41
3	67,76	61
4	98,10	89
5	131,00	124
6	169,50	163
7	205,50	199
8	228,30	227
9	247,15	244
10	250,50	253
11	253,80	257
12	254,40	259



2.3 Dynamische Systeme

55

1. a)

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_{10}
2,000	1,414	1,189	1,091	1,044	1,022	1,011	...	1,0007

Für große n geht a_n gegen 1.

b)

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_{10}	b_{20}	b_{50}
2,000	-0,416	0,915	0,610	0,820	0,683	0,7467	0,7392	0,7391

Für große n geht b_n gegen 0,739...

c)

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	...
2	4	16	256	65 536	4 294 967 296	...

Für größer werdende n wächst c_n immer stärker.

55

2. a)

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_{10}
1,500	1,225	1,107	1,052	1,026	1,013	1,006	...	1,0004
1,100	1,049	1,024	1,012	1,006	1,003	1,001	...	1,0001
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	...	1,0000
0,900	0,949	0,974	0,987	0,993	0,997	0,998	...	0,9999

Die Iterationswerte nähern sich unabhängig vom Startwert dem Wert 1, für $a_0 > 1$ von oben, für $0 < a_0 < 1$ von unten.

Für $a_0 = 1$ sind alle Werte der Iteration konstant 1.

b)

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_{10}	b_{20}	b_{50}
1,500	0,071	0,997	0,542	0,856	0,655	0,7503	0,7393	0,7391
1,100	0,454	0,899	0,622	0,812	0,688	0,7461	0,7392	0,7391
1,000	0,540	0,858	0,654	0,793	0,701	0,7442	0,7392	0,7391
0,900	0,622	0,813	0,687	0,773	0,716	0,7423	0,7391	0,7391

Die Iterationswerte nähern sich unabhängig vom Startwert dem Wert 0,739...

c)

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	...	c_{10}
1,500	2,250	5,063	25,629	656,841	431 439,883
1,100	1,210	1,464	2,144	4,595	21,114	445,792
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,0000	...	1,0000
0,900	0,810	0,656	0,430	0,185	0,034	0,0012	...	0,0000

Für $c_0 > 1$ wachsen die Iterationswerte unbeschränkt; je größer c_0 ist, desto schneller.

Für $c_0 = 1$ sind alle Werte der Iteration konstant 1.

Für $c_0 < 1$ gehen die Iterationswerte für große n gegen 0.

3. a)

P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$(1 \mid 432^\circ)$ $= (1 \mid 72^\circ)$	$(1 \mid 144^\circ)$	$(1 \mid 288^\circ)$	$(1 \mid 576^\circ)$ $= (1 \mid 216^\circ)$	$(1 \mid 432^\circ)$ $= (1 \mid 72^\circ)$	$(1 \mid 144^\circ)$	$(1 \mid 288^\circ)$

Es gibt nur 6 verschiedene Punkte; für $n \geq 2$ treten 4 Punkte periodisch immer wieder auf:

$$P_0 \quad P_1 \quad P_2 = P_6 = P_{10} = \dots$$

$$P_3 = P_7 = P_{11} = \dots$$

$$P_4 = P_8 = P_{12} = \dots$$

$$P_5 = P_9 = \dots$$

55

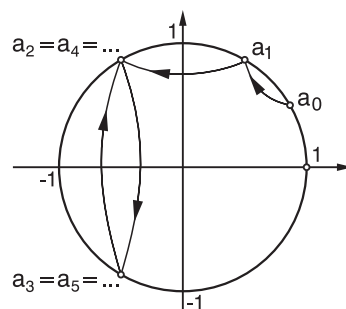
3. b)

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	...
$(1 \mid 30^\circ)$	$(1 \mid 60^\circ)$	$(1 \mid 120^\circ)$	$(1 \mid 240^\circ)$	$(1 \mid 480^\circ)$ $= (1 \mid 120^\circ)$	$(1 \mid 240^\circ)$	$(1 \mid 480^\circ)$ $= (1 \mid 120^\circ)$...

Es gibt nur 4 verschiedene Punkte;
für $n \geq 2$ treten 2 Punkte periodisch
immer wieder auf:

$$P_0 \quad P_1 \quad P_2 = P_4 = P_6 = \dots$$

$$P_3 = P_5 = P_7 = \dots$$



56

4. a)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26

$$O_2 = \{2, 5, 8, 11, \dots\} \quad O_6 = \{6, 9, 12, 15, \dots\} \quad O_{-4} = \{-4, -1, 2, 5, \dots\}$$

Die Werte wachsen unbeschränkt.

b)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536	3072
-3	-6	-12	-24	-48	-96	-192	-384	-768	-1536	-3072

$$O_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

$$O_3 = \{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$$

$$O_{-3} = \{-3, -6, -12, -24, -48, \dots\}$$

Der Orbit wird durch die Exponentialfunktion $f(x) = x_0 \cdot 2^x$ für $x \in \mathbb{N}_0$
beschrieben. Die Werte wachsen unbeschränkt.

c)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125
8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125
-128	-64	-32	-16	-8	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	-0,125

$$O_{128} = \{128, 64, 32, 16, 8, \dots\}$$

$$O_8 = \{8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25, \dots\}$$

$$O_{-128} = \{-128, -64, -32, -16, -8, \dots\}$$

Der Orbit wird durch die Exponentialfunktion $f(x) = x_0 \cdot 0,5^x$ für $x \in \mathbb{N}_0$
beschrieben. Die Werte nähern sich für große x immer mehr dem Wert 0.

57

5. Zu unterscheiden sind folgende Fälle:

 $x_0 > 1$ Beispiel: $x_0 = 2$

$$O_2 = \{2, 4, 16, 256, 65\,536, 4\,294\,976\,296, \dots\}$$

Die Werte wachsen unbeschränkt.

 $x_0 = 1$ $O_1 = \{1\}$ Der Orbit besteht nur aus der Zahl 1. $0 < x_0 < 1$ Beispiel: $x_0 = 0,6$

$$O_{0,6} = \{0,6; 0,36; 0,1296; 0,0168\dots; 0,00028\dots; \\ 0,000001\dots; \dots\}$$

Die Werte gehen gegen 0.

 $x_0 = 0$ $O_0 = \{0\}$ Der Orbit besteht nur aus der Zahl 0. $-1 < x_0 < 0$ Beispiel: $x_0 = -0,7$

$$O_{-0,7} = \{-0,7; 0,49; 0,2401; 0,0567\dots; 0,00332\dots; \\ 0,0000110\dots; \dots\}$$

Die Werte gehen gegen 0.

 $x_0 = -1$ $O_{-1} = \{-1, 1\}$ Der Orbit besteht aus den Zahlen -1 und 1 . $x_0 < -1$ Beispiel: $x_0 = -2$

$$O_{-2} = \{-2, 4, 16, 256, 65\,536, 4\,294\,976\,296, \dots\}$$

Die Werte wachsen unbeschränkt.

6.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}	x_{12}	x_{14}
1,001	1,002	1,004	1,008	1,016	1,033	2,783	59,98	12 939 736
1,0001	1,0002	1,0004	1,0008	1,0016	1,0032	1,1078	1,5062	5,1465
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9968	0,9027	0,6639	0,1943
0,999	0,998	0,996	0,992	0,984	0,968	0,359	0,0166	0,00000008

Während für $x_0 = 1$ der Orbit aus der Zahl 1 besteht, führen schon kleine Abweichungen des Startwertes zu völlig anderen Orbits. Für Abweichungen nach oben entstehen Zahlenfolgen, die unbeschränkt wachsen, für Abweichungen nach unten entstehen Zahlenfolgen, die gegen 0 gehen.

7. $x_0 = 0$ $O_0 = \{0, 1\}$ Die Iteration ist für den Startwert $x_0 = 0$ nur für x_0 und x_1 definiert; sie bricht danach ab. $x_0 = 1$ $O_1 = \{1\}$ Die Iteration bricht nach dem Startwert $x_0 = 1$ ab. $x_0 \neq 0, x_0 \neq 1$ Beispiel: $x_0 = 2$ $O_2 = \{2; -1; 0,5\}$

Beispiel: $x_0 = 0,4$ $O_{0,4} = \left\{0,4; \frac{5}{3}; -1,5\right\}$

Beispiel: $x_0 = -0,7$ $O_{-0,7} = \left\{-0,7; \frac{10}{17}; \frac{17}{7}\right\}$

Beispiel: $x_0 = -1$ $O_{-1} = \{-1; 0,5; 2\}$

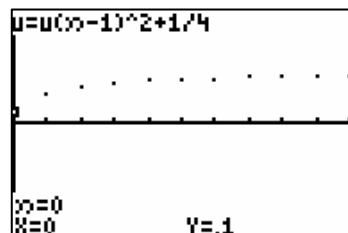
Die Orbits sind periodisch mit der Periode 3; alle Zahlen wiederholen sich nach jeweils 3 Rechenschritten.

57

8. a)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1,25	1,8125	3,5352	12,747	162,74	26 486	701 507 907
0,75	0,8125	0,9102	1,0784	1,4129	2,2463	5,29597	28,29726
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,1	0,26	0,3176	0,3509	0,3731	0,3892	0,40149	0,41119
0	0,25	0,3125	0,3477	0,3709	0,3875	0,40019	0,41015

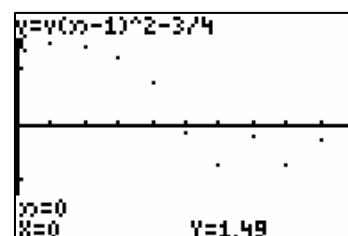
Kleine Änderungen des Startwertes
 $x_0 = 0,5$ führen zu wesentlichen
 Änderungen des Orbits.



b)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,51	1,5301	1,5912	1,7819	2,4253	5,1321	25,588	654,00
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
1,49	1,4701	1,4112	1,2415	0,7912	-0,1239	-0,7346	-0,2103
1	0,25	-0,6875	-0,2773	-0,6731	-0,2970	-0,6618	-0,3120
0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
0,25	-0,6875	-0,2773	-0,6731	-0,2970	-0,6618	-0,3120	-0,6527

Kleine Änderungen des Startwertes
 $x_0 = 1,5$ führen zu wesentlichen
 Änderungen des Orbits.



9. a) Wenn sich die Ergebnisse bei der Zahl k einpendeln, dann gilt für große n :
 $x_{n+1} = \cos(x_n) \approx k$ und weiterhin $x_{n+2} = \cos(x_{n+1}) \approx \cos(k) \approx k$
 Die Folge der Iteration nähert sich einer Zahl x , für die gilt: $\cos(x) = x$
- b) $\cos(x) = x \Rightarrow x = 0,739\dots$
- c) Das Ergebnis ist unabhängig vom Startwert x_0 .
10. a) Iteration: $a_{n+1} = \sin(a_n)$
 Diese Iteration führt sehr langsam auf den Grenzwert 0.
 Die Lösung von $\sin(x) = x$ ist $x = 0$.

57

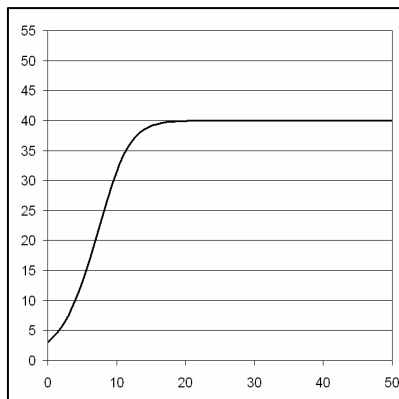
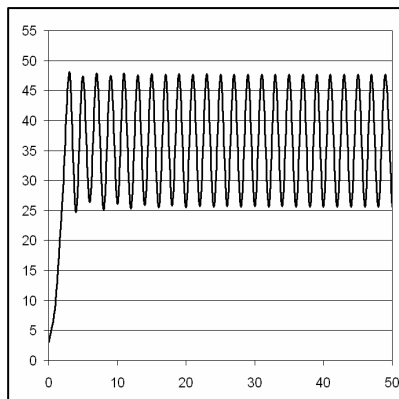
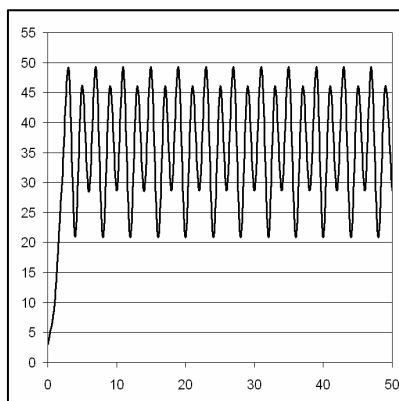
10. b) Der Punkte des Graphen von $f(x) = \sin(x)$, für den $f(x) = x$ gilt, liegt auf der Geraden $x = y$. Die grafische Lösung zeigt, dass die Gerade $y = x$ und der Graph von $y = \sin(x)$ nur den Koordinatenursprung gemeinsam haben. Also: $\sin(x) = x \Rightarrow x = 0$.
11. a) Welchen Einfluss hat der Faktor r auf die Iteration? Welche verschiedene Fälle können unterschieden werden?
- b) $r > 1$ Die Iterationswerte wachsen für $x_0 > 0$ und fallen für $x_0 < 0$ unbeschränkt.
- $r = 1$ $O = \{x_0\}$ Alle Iterationswerte sind x_0 .
- $0 < r < 1$ Die Iterationswerte gehen gegen 0; sie nähern sich 0 für $x_0 > 0$ von oben, für $x_0 < 0$ von unten.
- $r = 0$ $O = \{x_0; 0\}$ Nach dem ersten Iterationswert x_0 folgt nur noch der Wert 0.
- $-1 < r < 0$ Die Iterationswerte gehen gegen 0; sie nähern sich 0 alternierend (positiv und negativ).
- $r = -1$ $O = \{-x_0; x_0\}$ Die Werte x_0 und $-x_0$ treten abwechselnd auf.
- $r < -1$ Die Iterationswerte wachsen bzw. fallen alternierend positiv und negativ unbeschränkt.

58

12. a) Informiere dich über den Begriff „dicht“.
- b) Irrationale Zahlen können auf dem Taschenrechner nicht exakt dargestellt werden, d. h. durch Ausprobieren mit dem Taschenrechner sind keine nichtperiodischen Orbits zu finden.
13. Für bestimmte Werte des Parameters r
- nähert sich die Zahlenfolge einem Wert,
 - schwankt die Zahlenfolge zwischen 2 (4, ...) Werten hin und her,
 - verhält sich die Zahlenfolge regellos.
- Im letzten Fall spielt der Startwert eine sehr wichtige Rolle

Möglicher Forschungsauftrag:

- Für welche Werte von r ändert die Folge ihr Verhalten von „nähert sich einem Wert“ zu „pendelt zwischen zwei Werten hin und her“.
- Ändere den Startwert geringfügig. Welchen Einfluss hat diese Änderung auf die Zahlenfolge für den Fall, dass die Folge
 - sich einem Wert nähert,
 - zwischen zwei Werten pendelt,
 - sich regellos verhält?

13. Beispiele zum Startwert $x_0 = 3$ $r = 0,01$  $r = 0,06$  $r = 0,063$  $r = 0,075$ 