

Lösungen

1.1 Trigonometrische Funktionen und ihre Graphen

6

1. a) Winkelsumme im inneren Fünfeck beträgt 540°
 $\Rightarrow \alpha = 540 : 5 = 108^\circ$.
 Nebenwinkel von α ist $\delta = 72^\circ$.
 δ ist Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck mit der Basis b und den Schenkeln a . Scheitelwinkel ist hier $\gamma = 36^\circ$.
 Es ist jetzt

$$\frac{h}{s} = \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow h = 8 \cdot \cos 18^\circ = 7,608.$$

$$\frac{d/2}{s} = \sin \frac{\gamma}{2}$$

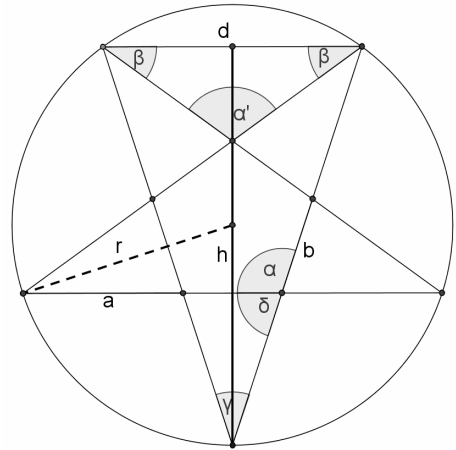
$$\Rightarrow \frac{d}{2} = 8 \cdot \sin 18^\circ = 2,472$$

$$\Rightarrow d = 4,944 \text{ m}$$

$$\text{Scheitelwinkel } \alpha' = 108^\circ$$

$$\frac{d}{a} = \sin \frac{\alpha'}{2} \Rightarrow 2,472 = a \cdot \sin 54^\circ \Rightarrow a = \frac{2,472}{0,809} = 3,056 \text{ m},$$

$$b = 8 - 2 \cdot 3,056 = 1,888$$



b) $\frac{0,5 \cdot s}{r} = \cos \frac{\gamma}{2} \Rightarrow r = \frac{4}{\cos 18^\circ} = 4,21$

7

2. a) Mit dem Taschenrechner ermittelte Werte:

α	0°	20°	40°	60°	80°	90°
$\sin(\alpha)$	0	0,34	0,64	0,87	0,98	1
$\cos(\alpha)$	1	0,94	0,77	0,50	0,17	0

- b) $180^\circ < \alpha < 360^\circ$: Die auf der Scheibe abgelesenen Punkte haben negative y-Werte, die Sinusfunktion verläuft also im negativen Bereich.

$$\text{Man liest ab: } \sin(\alpha) = -\sin(\alpha - 180^\circ)$$

$-180^\circ < \alpha < 0^\circ$: Da sich auf der Scheibe negative Winkelmaße durch Drehung im Uhrzeigersinn darstellen lassen, liest man ab:

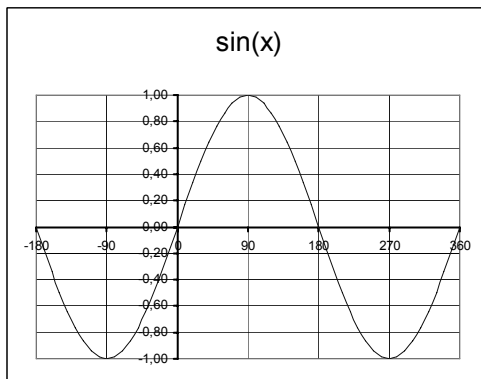
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

α	-180°	-150°	-120°	-90°	-30°	90°	135°
$\sin(\alpha)$	0	-0,5	-0,87	-1	-0,5	1	0,71

α	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin(\alpha)$	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

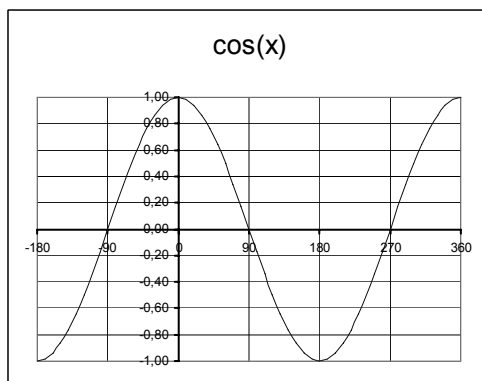
7

2. b) Fortsetzung



α	-180°	-150°	-120°	-90°	-30°	90°	135°
$\cos(\alpha)$	-1	-0,87	-0,5	0	0,87	0	-0,71

α	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos(\alpha)$	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1



3. a) Der Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1$ beträgt $u = 2\pi$. Jedem Mittelpunktswinkel α kann ein Kreisbogen der Länge b eindeutig zugeordnet werden. So erhält man für jeden Winkel im Gradmaß einen entsprechenden Winkel im Bogenmaß.

Gradmaß	0°	360°	180°	90°	270°
Bogenmaß	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Die Beschriftung der x-Achse mit den Gradmaßen kann daher eindeutig umgestellt werden auf eine Beschriftung im Bogenmaß.

7

3. b) Mithilfe des Bogenmaßes kann die Sinusfunktion für negative Werte und für Werte über 2π hinaus fortgesetzt werden. Der Graph der Sinusfunktion im Intervall $[0; 2\pi]$ bzw. $[0^\circ; 360^\circ]$ wird jeweils um 2π in Richtung der x-Achse nach links bzw. nach rechts verschoben.

```

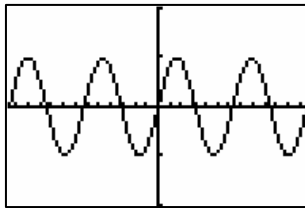
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```

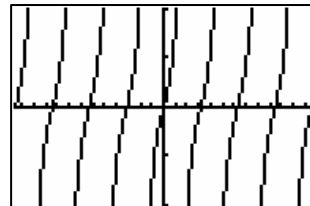
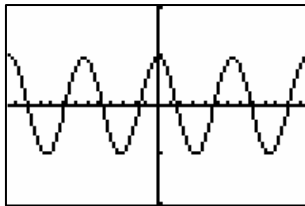
```

WINDOW
Xmin=-12.56637...
Xmax=12.566370...
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1

```



- c) Kosinusfunktion analog Sinusfunktion
Tangensfunktion: Verschiebung des Graphen im Intervall $[0; \pi]$ um jeweils π nach links bzw. nach rechts.



4. a) An der Wand bewegt sich der Schatten während einer Umdrehung der Kreisscheibe zwischen den Markierungen 1 und -1 einmal hin und her. Die Bewegungsgeschwindigkeit des Schattens ändert sich dabei: Sie ist bei der Markierung 0 am größten, bei den Markierungen 1 und -1 am geringsten.
Die Bewegung des Schattens am Boden verhält sich genauso.
- b) Die Bewegungen des Schattens am Boden und an der Wand sind eindeutig aufeinander bezogen. Deshalb ist die Lösung eindeutig:
Graph (B): Schatten am Boden
Graph (C): Schatten an der Wand

9

5. a) $x = 0,628$ b) $x = 1,50$ c) $\alpha = 14,33^\circ$ d) $\alpha = 22,5^\circ$
e) $x = 12,56$ f) $\alpha = 114,65^\circ$ g) $\alpha = 108^\circ$
6. $\sin(1) = \sin(\pi - 1) = \sin(2\pi + 1) = \sin(3\pi - 1) = \sin(4\pi + 1) = \sin(5\pi - 1) = \dots$
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \dots$

10

7. a) $L = \{0,403; 2,739\}$ b) $L = \{2,366; 3,917\}$
 c) $L = \{0,967; 4,109\}$ d) $L = \{1,537; 4,746\}$
 e) $L = \{1,955; 5,097\}$ f) $L = \{4,115; 5,309\}$
 g) $L = \{1,102; 5,181\}$ h) $L = \{4,130; 5,295\}$
8. a) $L = \{-0,625; 0,625\}$ b) $L = \{ \}$
 c) $L = \{-1,810; 1,332\}$ d) $L = \{0,406; 2,736\}$
9. $\frac{\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{12}$ $-\frac{23\pi}{12}$ $\frac{23\pi}{12}$ (0,966)
 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{27\pi}{12}$ $\frac{15\pi}{4}$ $\frac{13\pi}{4}$ (0,707)
 $\frac{13\pi}{6}$ $-\frac{11\pi}{6}$ (0,866)
10. a) $L = \{-6,082; -3,343; 0,201; 2,940\}$
 b) $L = \{-5,236; -1,047; 1,047; 5,236\}$
 c) $L = \{-5,176; -2,034; 1,107; 4,249\}$
 d) $L = \{-2,618; -0,524; 3,665; 5,760\}$
 e) $L = \{-3,927; -0,785; 2,356; 5,498\}$
 f) $L = \{ \}$
 g) $L = \{-4,467; -1,326; 1,816; 4,957\}$
 h) $L = \{-5,163; -4,261; 1,120; 2,022\}$
 i) $L = \{-4,460; -1,823; 1,823; 4,460\}$
 j) $L = \{ \}$
11. Weitere Lösungen sind „knapp über $\frac{3\pi}{2}$ und dann alle 2π wieder“, wobei sowohl hier wie auch bei Dorothies Lösung „alle 2π wieder“ in „beide Richtungen“, positiv und negativ, gemeint ist.
12. $\sin(x)$ Achsensymmetrisch zur Senkrechten in jedem Hoch- und Tiefpunkt; punktsymmetrisch zu jeder Nullstelle; verschiebesymmetrisch mit Verschiebung um 2π in Richtung der x-Achse.
 $\cos(x)$ Achsensymmetrisch zur Senkrechten in jedem Hoch- und Tiefpunkt; punktsymmetrisch zu jeder Nullstelle; verschiebesymmetrisch mit Verschiebung um 2π in Richtung der x-Achse.

10

13.	Name	Sinusfunktion
	Periode	2π
	Nullstellen	$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$
	Hochpunkte	$\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \dots$
	Tiefpunkte	$\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$
	Symmetrien	Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und $(k\pi \mid 0)$ Verschiebungssymmetrisch um Vielfache von 2π

10

13. Fortsetzung

Name	Kosinusfunktion
Periode	2π
Nullstellen	$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, \dots$
Hochpunkte	$0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$
Tiefpunkte	$\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$
Symmetrien	Punktsymmetrisch zu $(\frac{\pi}{2} \pm k\pi 0)$ Verschiebungssymmetrisch um Vielfache von 2π

Name	Tangensfunktion
Periode	π
Nullstellen	$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$
Hochpunkte	keine
Tiefpunkte	keine
Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$
Symmetrien	Punktsymmetrisch zu jeder der Nullstellen Verschiebungssymmetrisch um Vielfache von π

14. Jan hat nicht Recht. Beispiel:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx 0,707$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,707 \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx -0,707$$

15. a) Begründung mithilfe der Punktsymmetrie des Sinusgraphen.

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

11

16. a) Anhand des Einheitskreises erkennt man mit der Definition des Tangens:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{grün}}{1} = \text{grün}$$

b) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{r}{\frac{\text{blau}}{r}} = \frac{\text{rot}}{\text{blau}} \stackrel{(2. \text{ Strahlensatz})}{=} \frac{\text{grün}}{1} = \tan(x)$

c) Vorzeichen von $\tan(x)$

im 1. Quadranten: positiv, im 2. Quadranten: negativ,

im 3. Quadranten: positiv, im 4. Quadranten: negativ

Nullstellen von $\tan(x)$: $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

Definitionslücken von $\tan(x)$: $\dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$, an diesen

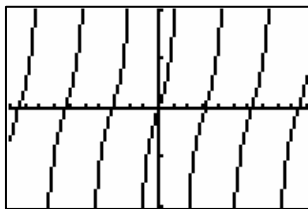
Stellen hat $\tan(x)$ Polstellen, was im Einklang mit der Formel

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \text{ ist, denn an diesen Stellen ist } \cos(x) = 0.$$

d) Das Streckenverhältnis $\tan(\alpha) = \frac{\text{rot}}{\text{blau}}$ durchläuft bei jeder Umkreisung von P auf dem Umfang des Einheitskreises zweimal die gleichen Werte. Die Periode von $\tan(x)$ ist also π .

11

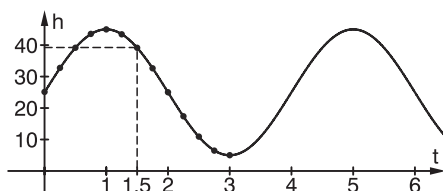
16. e) Zu jeder seiner Nullstellen ist $\tan(x)$ punktsymmetrisch.



17. a) $L = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$ b) $L = \{0; \pi\}$ c) $L = \{0,66624; 2,47535\}$

18. a) $L = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$ b) $L = \left\{ 0; \frac{\pi}{2}; 2\pi \right\}$ c) $L = \{ \}$

19. a)



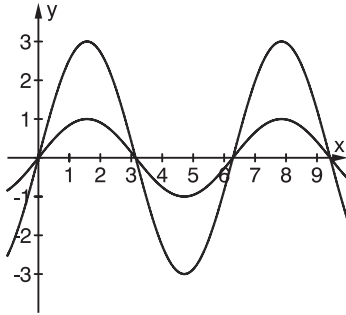
- b) Die Bahn der Gondel kann mit der Bewegung eines Punktes am Kreis verglichen werden; der Winkel zwischen der Stellung $t = 0$ min und jeder anderen Stellung der Gondel entspricht dem Winkel x im Kreis (siehe Schülerband, Seite 8). Die Gondel verhält sich wie der Punkt P auf dem Kreis und erzeugt so eine Sinuskurve.
- c) Der Graph, den die Gondel erzeugt, beginnt nicht im Koordinatenursprung, da die Gondel nicht die Höhe 0 über dem Erdboden erreicht. Der Unterschied zwischen Hoch- und Tiefpunkt beträgt 40 m.
Funktionsgleichung: $f(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + 25$

12

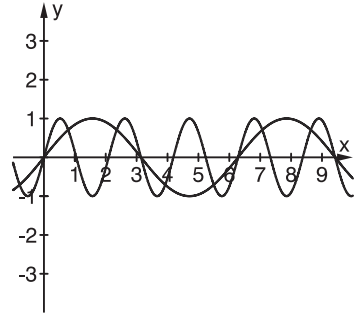
20. Der Faktor 4 gibt an, bis zu welchem Hoch- und Tiefpunkt die Schwingungskurve ausschlägt.
a) Gleichung (2) b) Gleichung (1) c) Gleichung (3)
21. a) Die Untersuchung der Graphen zeigt, dass die Graphen für $\sin(2x)$ und $\sin(3x)$ gegenüber $\sin(x)$ gestaucht sind; die Periodenlänge ist kleiner. Die Graphen von $\sin(0,5x)$ und $\sin(0,2x)$ sind gegenüber $\sin(x)$ gestreckt; die Periodenlänge ist größer.
- b) Wenn $b > 1$, dann wird der Graph von $\sin(bx)$ in Richtung der x -Achse gestaucht, wenn $b < 1$ ist, wird der Graph gestreckt.
22. Lösung siehe Schülerband, Seite 13, Basiswissen.
Die Parameter bei der quadratischen Funktion bewirken das gleiche wie die bei der Sinusfunktion; a streckt oder staucht den Graphen in y -Richtung, c verschiebt den Graphen in x -Richtung und d verschiebt den Graphen in y -Richtung.

14

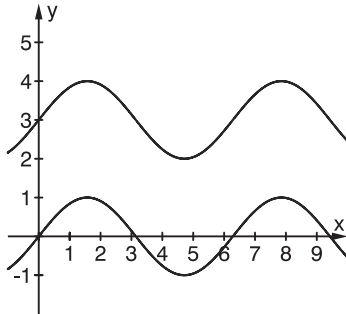
23. a)



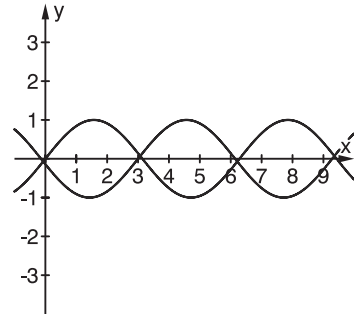
b)



c)



d)



24. a) $y = 2 \cdot \sin(0,5 \cdot x)$

b) $y = \sin\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ oder z. B. $y = \sin\left(2 \cdot x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1$

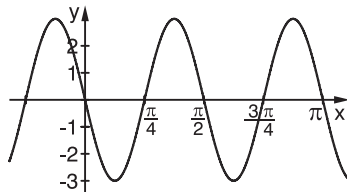
c) $y = -\sin(2x)$ oder z. B. $y = \sin(2x - \pi)$

25. a) $y = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

b) $y = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot x + \frac{5\pi}{6}\right) + 6$

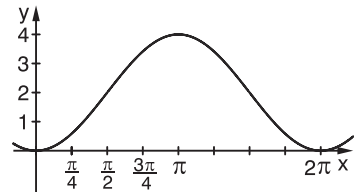
26. a) $y = -3 \cdot \sin(4x)$

(gelbes Textfeld)



b) $y = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

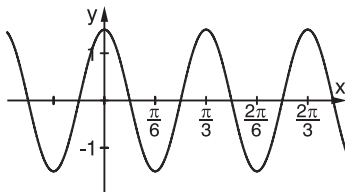
(grünes Textfeld)



14

26. c) $y = 1,5 \cdot \sin\left(6 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$

(blaues Textfeld)



d) (rotes Textfeld)

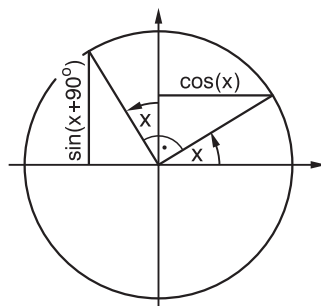
Die Wertemenge $1 \leq y \leq 3$ lässt keine Nullstelle zu. Zu den Vorgaben gibt es keine Sinusfunktion.

27. Am Einheitskreis kann man verdeutlichen:

$$\cos(x) = \sin(x + 90^\circ)$$

bzw.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



28. a) Der Wertebereich der Sinusfunktion ist $[-a; a]$; er umfasst also ein Intervall der Länge $2a$. Daher gilt die Formel.
 b) Falsch. Je größer die Periodenlänge, desto geringer die Frequenz.
 c) Richtig. Die Amplitude wird durch einen Streckfaktor in Richtung der y -Achse bestimmt. Dieser Faktor verändert nicht die Nullstellen der Funktion.
29. Analog zur Sinusfunktion beeinflussen die Faktoren a und b die Amplitude bzw. die Periodenlänge und die Frequenz der Kosinusschwingung (siehe Schülerband, Seite 13, Basiswissen).

Mathe-Kiste

- Wenn man beim Zylinder r verdoppelt, wird das Volumen viermal so groß.
 Wenn man beim Zylinder h verdoppelt, wird das Volumen zweimal so groß.
 Wenn man beim Kegel r verdoppelt, wird die Oberfläche viermal so groß.
 Wenn man bei der Kugel r verdoppelt, wird das Volumen achtmal so groß.
 Wenn man bei der Kugel r verdoppelt, wird die Oberfläche viermal so groß.
- a) 2 5 10 17 26 37 50 65 ... $a_{n+1} = a_n + 2n - 1; a_1 = 2$
- b) 1 3 6 10 15 21 28 36 ... $a_n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- c) 2 3 5 7 11 13 17 19 23 Folge der Primzahlen

14

- Es gibt keine Zahlen x und y , die den Bedingungen genügen; die Aufgabe ist nicht lösbar.

15

30. a) Graph Mitte b) Graph rechts c) Graph links
31. a) Richtig (Addition gleicher Summanden)
 b) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ ist eine gestreckte Schwingung mit der Periodenlänge 4π . Die Addition der gleichen Funktionswerte ändert die Amplitude, nicht aber die Periodenlänge. Die Umformung ist falsch.
 c) Gegenbeispiel: $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
 $\cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$
 Die Umformung ist falsch.
 d) Der Faktor 0,5 beeinflusst die Amplitude des Funktionsgraphen, lässt aber die Nullstellen unverändert. Das bedeutet, $\cos(2x)$ und $\cos(x)$ müssten dieselben Nullstellen haben. Das ist nicht der Fall; die Umformung ist also falsch.
32. -

1.2 Modellieren periodischer Vorgänge

16

1. a) Charakteristisch sind die regelmäßig auftretenden R-Zacken, die jeweils einer Q-Zacke folgen.
 Die S-Zacke ist nicht erkennbar; deutlich erkennbar ist die T-Welle.
 Abgesehen davon, dass die Zacken und Wellen periodisch auftreten, ist dem Graphen kein Bezug zu normalen Sinusschwingungen zu entnehmen.
- b) Der Ablauf wiederholt sich regelmäßig, weil er vom Sinusknoten, dem sog. Schrittmacher, mit einer bestimmten Frequenz angetrieben wird. Die immer wiederkehrenden Abschnitte dauern etwa 0,8 Sekunden.
- c) 1,25 Schwingungen pro Sekunde
- d) Bei Herzrhythmusstörungen würde die Kurve Unregelmäßigkeiten aufweisen.

17

2. Für diese Modellierungsaufgabe empfiehlt sich arbeitsteilige Gruppenarbeit. Günstig ist der Einsatz elektronischer Werkzeuge, z. B. Tabellenkalkulation oder GTR.
- a) Die Tage des Jahres sind durchnummeriert auf der x -Achse dargestellt. Da der Sonnenaufgang an jedem Tag zu einem bestimmten Zeitpunkt stattfindet, kann man dem „Verlauf“ des Tages keine weiteren Zeitpunkte des Sonnenaufgangs zuordnen; deshalb dürfen die Punkte nicht miteinander verbunden werden.

17

2. b) Überprüfung mittels Stichproben:

01.01 $a(1) \approx 8,46$ entspricht 8:27,6 Uhr (8:27 laut Tabelle)07.02. $a(38) \approx 8,01$ entspricht 8:00,5 Uhr (7:51 laut Tabelle)20.08. $a(232) \approx 4,82$ entspricht 4:49,4 Uhr (5:15 laut Tabelle)17.10. $a(290) \approx 6,87$ entspricht 6:52,0 Uhr (6:48 laut Tabelle)

Die Übereinstimmung mit den tatsächlichen Uhrzeiten ist leidlich gut; es gibt Abweichungen bis zu fast 26 Minuten (am 20.08.).

Wie wurde die Gleichung gefunden?

Periodenlänge 365,25 Tage $\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{365,25} \cdot t\right)$

Maximum: 8:27 Uhr entspricht 8,45

Minimum: 4:05 Uhr entspricht 4,08

Amplitude: $\frac{\text{Max}-\text{Min}}{2} = \frac{8,45-4,08}{2} \approx 2,19$ Verschiebung in y-Richtung: $4,08 + 2,19 = 6,27$

c) Sonnenuntergang:

Periodenlänge 365,25 Tage

Die Kosinusfunktion muss um eine halbe Periodenlänge in x-Richtung verschoben werden.

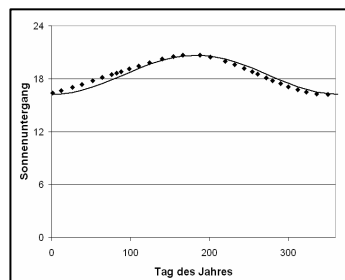
 $\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{365,25} \cdot t - \pi\right)$

Maximum: 20:40 Uhr entspricht 20,67

Minimum: 16:14 Uhr entspricht 16,23

Amplitude: $\frac{\text{Max}-\text{Min}}{2} = \frac{20,67-16,23}{2} \approx 2,22$ Verschiebung in y-Richtung: $16,23 + 2,22 = 18,45$ Funktionsgleichung: $u(t) = 2,22 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365,25} \cdot t - \pi\right) + 18,45$

Die Übereinstimmung mit den tatsächlichen Uhrzeiten ist nicht besonders gut; es gibt Abweichungen bis zu 43 Minuten (am 21.02.).



Tageslänge:

Periodenlänge 365,25 Tage

Die Kosinusfunktion muss um eine halbe Periodenlänge in x-Richtung verschoben werden.

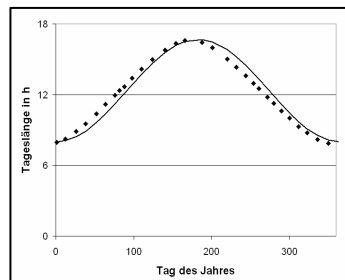
 $\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{365,25} \cdot t - \pi\right)$

Maximum: 16:35 Stunden entspricht 16,58

Minimum: 7:53 Stunden entspricht 7,88

Amplitude: $\frac{\text{Max}-\text{Min}}{2} = \frac{16,58-7,88}{2} \approx 4,35$ Verschiebung in y-Richtung: $7,88 + 4,35 = 12,23$ Funktionsgleichung: $L(t) = 4,35 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365,25} \cdot t - \pi\right) + 12,23$

Die Übereinstimmung mit den tatsächlichen Tageslängen ist nicht besonders gut; es gibt Abweichungen bis zu 55 Minuten (am 01.09.).

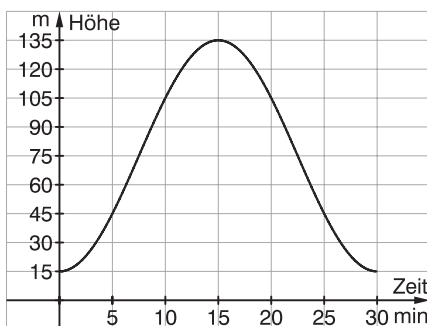


17

3. a) Der Graph ist in beiden Fällen eine Sinuskurve. Die Hochpunkte sind um 6:00 Uhr, im Laufe des Tages nimmt der maximale Luftstrom deutlich ab und erreicht um 18:00 Uhr in beiden Fällen seinen Tiefpunkt. Beim Asthmatiker ist der Luftstrom insgesamt deutlich tiefer als beim Nicht-Asthmatiker, und die Amplitude ist viel größer.
- b) Verschiebung nach unten in Richtung der y-Achse und Vergrößerung der Amplitude.
- c) Nicht-Asthmatiker: $L(t) = 15 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{24} \cdot t\right) + 440$
 Asthmatiker: $L(t) = 50 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{24} \cdot t\right) + 350$

20

4. a) Die Graphen haben für $t = 81$ und $t = 264$ gemeinsame Punkte. Das sind etwa der Frühlingsanfang und der Herbstanfang.
- b) Zu ändern ist nur die Amplitude: $y(t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) + 12$
- c) Der Graph der Sinusfunktion muss an der Achse $y = 12$ gespiegelt werden: $y(t) = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) + 12$
5. $y = 60 \sin\left(\frac{2\pi}{30} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 75$ (t in Minuten)



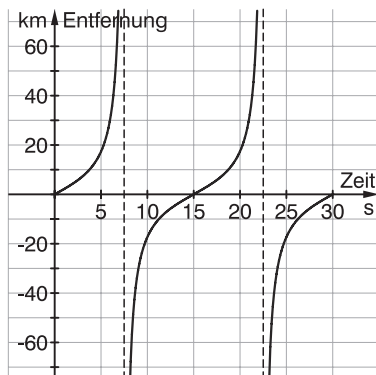
6. a) Der Lichtschein bewegt sich zur einen Seite und wird immer schwächer, bis man ihn nicht mehr sieht. Nach etwa 15 Sekunden sieht man den Lichtschein nun an der anderen Seite in weiter Ferne, er kommt allerdings in wenigen Sekunden näher.

b) $y = 10 \tan\left(\frac{2\pi}{30} \cdot t\right)$

Die Funktion modelliert die Bewegung des Lichtscheins auf der Mauer.

Das Licht trifft auf die Mauer für die t-Werte $0 \leq t < 7,5$ und $22,5 < t \leq 30,0$.

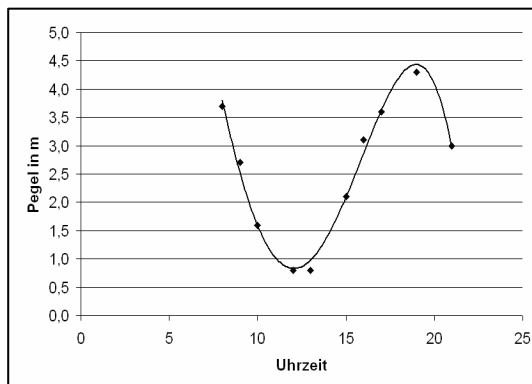
Für $t = 0$ und $t = 30$ trifft der Strahl senkrecht auf die Mauer.



21

7. a) Zu Abweichungen einer Ausgleichskurve von den tatsächlichen Messwerten führt vor allem die Auswahl des Typs der Ausgleichskurve (linear, exponentiell, polynomisch, ...)

Ferner führen in diesem Beispiel Ungenauigkeiten beim Messen der Zeit und des Pegelstandes zu Abweichungen.



- b) Periodenlänge 12 Stunden $\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{12} \cdot t\right)$ (t in Stunden)

Maximum: 4,3 Minimum: 0,8

Amplitude: $\frac{\text{Max}-\text{Min}}{2} = \frac{4,3-0,8}{2} = 1,75$

Verschiebung in x-Richtung: $\frac{7}{12} \cdot \pi$

Verschiebung in y-Richtung: $0,8 + 1,75 = 2,55$

Funktionsgleichung: $P(t) = 1,75 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12} \cdot \left(t - \frac{7}{2}\right)\right) + 2,55$

Mit P(t) können die Pegelstände berechnet werden, die Johannes nicht gemessen hat:

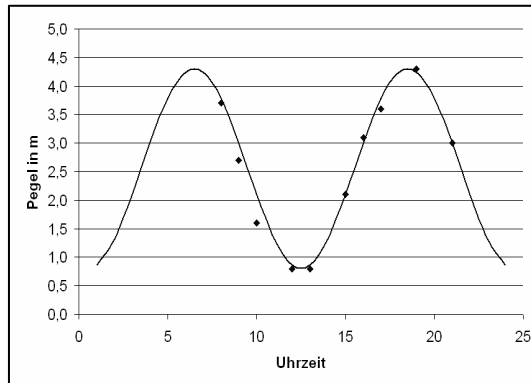
Uhrzeit	1	2	3	4	5	6	7	8
Pegel gemessen								3,7
Pegel berechnet	0,86	1,31	2,10	3,00	3,79	4,24	4,24	3,79

Uhrzeit	9	10	11	12	13	14	15	16
Pegel gemessen	2,7	1,6		0,8	0,8		2,1	3,1
Pegel berechnet	3,00	2,10	1,31	0,86	0,86	1,31	2,10	3,00

Uhrzeit	17	18	19	20	21	22	23	24
Pegel gemessen	3,6		4,3		3,0			
Pegel berechnet	3,79	4,24	4,24	3,79	3,00	2,10	1,31	0,86

21

7. b) Fortsetzung



8. a) Durch Messen an der Grafik im Schülerband erhält man etwa folgende Werte: Hochpunkte bei 9,6 und bei 22,2; Tiefpunkte bei 3,0, bei 15,6 und bei 28,5 (Messfehler!).

Man kann daraus schließen, dass die Periodenlänge etwa 12,6 Stunden beträgt.

Danach wäre das nächste Hochwasser am 9.8. um 11 Uhr, das nächste Niedrigwasser am 9.8. etwa um 17 Uhr.

- b) Gesucht wird eine Funktion $f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t - C) + D$ (t in Stunden)
Der Wertebereich der Funktion umfasst etwa das Intervall $[0,25; 3,25]$.
Die Amplitude ist also $a \approx 1,5$. $\Rightarrow f(t) = 1,5 \cdot \sin(B \cdot t - C) + D$

Die Periodenlänge beträgt etwa 12,6 Stunden: $\frac{2\pi}{B} = 12,6$

$$\Rightarrow f(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12,6} \cdot t - C\right) + D$$

Die vertikale Verschiebung beträgt etwa 1,75.

$$\Rightarrow f(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12,6} \cdot t - C\right) + 1,75$$

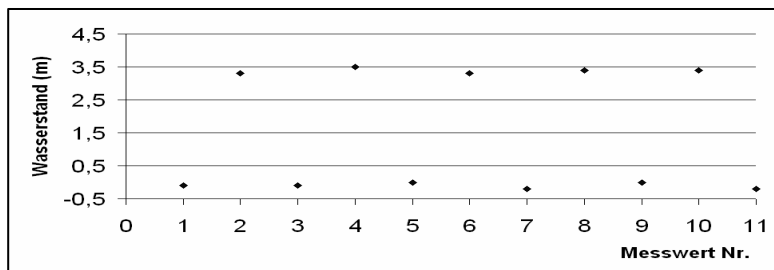
Die Sinuskurve ist um etwa eine halbe Periodenlänge, also um etwa π nach rechts verschoben.

$$\Rightarrow f(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12,6} \cdot t - \pi\right) + 1,75$$

- c) Die Gleichung gibt den Verlauf nur angenähert wieder. Für langfristige Vorhersagen müssen exaktere Messverfahren und mathematische Modelle gewählt werden.

21

8. d) Die für Hamburg gemessenen Werte führen zu folgendem Streudiagramm:



Die 11 Messwerte geben das Hoch- bzw. Niedrigwasser an der Messstelle an.

Die zeitlichen Abstände sind sehr unregelmäßig zwischen 5:17 Stunden und 7:23 Stunden. Auch die jeweils gemessenen Wasserstände differieren.

Deshalb kann keine einfache trigonometrische Funktion diese Wasserstände beschreiben. Der Grund: Das bei Flut elbaufwärts drängende Nordsee-Wasser trifft auf das elbabwärts fließende Elbwasser, beides unterliegt so vielen Einflüssen, dass in Hamburg kein regelmäßiger Pegelstand möglich ist.

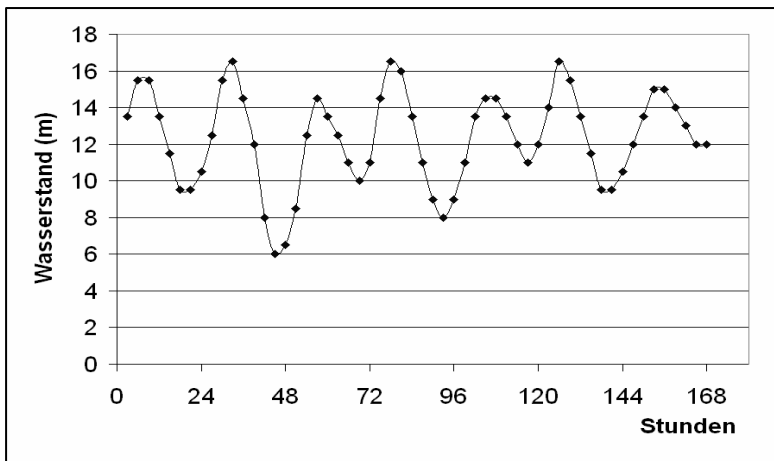
22

9. a) Der Graph zeichnet kontinuierlich den Wasserstand im Behälter auf. Am Rand um die linierte Kreisscheibe kann man Wochentag und Uhrzeit ablesen. Je weiter der Graph vom Mittelpunkt der Scheibe entfernt ist, desto höher ist der Wasserstand. Man sieht, dass der Wasserstand täglich von Mitternacht an ansteigt, morgens seinen Höhepunkt erreicht, dann wieder abfällt und am Abend seinen Tiefpunkt erreicht.
- b) Man kann die Wasserstände ablesen, in einer Tabelle darstellen und den Graphen zeichnen. Der Graph gleicht zwar grob einer Sinuskurve, unterscheidet sich davon aber vor allem durch sehr wechselnde Hoch- und Tiefwerte. Eine einheitliche Amplitude ist somit nicht bestimmbar.

22

9. b) Fortsetzung

Tag	Uhrzeit	Wasserstand abgelesen (in m)	Tag	Uhrzeit	Wasserstand abgelesen (in m)	Tag	Uhrzeit	Wasserstand abgelesen (in m)
Mo	3	13,5	Do	3	14,5	Sa	3	14,0
	6	15,5		6	16,5		6	16,5
	9	15,5		9	16,0		9	15,5
	12	13,5		12	13,5		12	13,5
	15	11,5		15	11,0		15	11,5
	18	9,5		18	9,0		18	9,5
	21	9,5		21	8,0		21	9,5
	24	10,5		24	9,0		24	10,5
Di	3	12,5	Fr	3	11,0	So	3	12,0
	6	15,5		6	13,5		6	13,5
	9	16,5		9	14,5		9	15,0
	12	14,5		12	14,5		12	15,0
	15	12,0		15	13,5		15	14,0
	18	8,0		18	12,0		18	13,0
	21	6,0		21	11,0		21	12,0
	24	6,5		24	12,0		24	12,0
Mi	3	8,5						
	6	12,5						
	9	14,5						
	12	13,5						
	15	12,5						
	18	11,0						
	21	10,0						
24	11,0							



22

9. c) Gesucht wird eine Funktion $f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t - C) + D$ (t in Stunden)
In der Tabelle erkennt man, dass der Wasserstand an jedem Tag um 21 Uhr seinen Tiefpunkt erreicht (im Durchschnitt 9,4 m) und an den meisten Tagen um 9 Uhr seinen Hochpunkt (im Durchschnitt 15,4 m). Die Amplitude ist also $a \approx 3$. $\Rightarrow f(t) = 3 \cdot \sin(B \cdot t - C) + D$

Die Periodenlänge beträgt etwa 24 Stunden: $\frac{2\pi}{B} = 24$

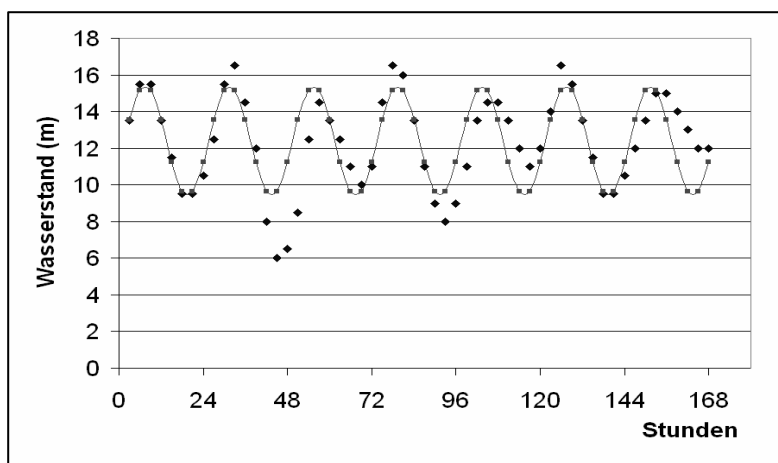
$$\Rightarrow f(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot t - C\right) + D$$

Die vertikale Verschiebung beträgt etwa 12,4.

$$\Rightarrow f(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot t - C\right) + 12,4$$

Die Sinuskurve ist um $\frac{\pi}{8}$ nach rechts verschoben.

$$\Rightarrow f(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot t - \frac{\pi}{8}\right) + 12,4$$



- d) Der Wasserverbrauch ist dann am größten, wenn das Gefälle des Graphen am größten ist. Das ist an den meisten Tagen zwischen 15 Uhr und 18 Uhr. Der Wasserverbrauch ist dann am geringsten, wenn der Anstieg des Graphen am größten ist; das ist in der Regel zwischen 3 Uhr und 6 Uhr.

10. a)

	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
Periodenlänge	1,77 Tage	3,54 Tage	7,2 Tage	16,8 Tage

- b) Mithilfe der Angabe des Bahnradius des Kallisto lassen sich die Bahnradien der anderen Monde berechnen. Der Bahnradius entspricht jeweils der Amplitude.

	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
Amplitude	418 444 km	697 407 km	1 150 722 km	1 883 000 km

22

10. b) Fortsetzung

$$\text{Io} \quad y(t) = 418\,444 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1,77} \cdot t - 0,3\right) \quad (\text{t in Tagen})$$

$$\text{Europa} \quad y(t) = 697\,407 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3,54} \cdot t - 8,8\right)$$

$$\text{Ganymed} \quad y(t) = 1\,150\,722 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7,2} \cdot t + 8,3\right)$$

$$\text{Kallisto} \quad y(t) = 1\,883\,000 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{16,8} \cdot t + 9,3\right)$$

1.3 Kurven in Parameterdarstellung mit trigonometrischen Funktionen

24

1. a) -

- b) I Einheitskreis, um 2 Einheiten nach rechts verschoben
 II Kreis mit dem Radius 3 um den Koordinatenursprung
 III Einheitskreis, um 1 Einheit nach rechts und um 1 Einheit nach unten verschoben
 IV Einheitskreis, um 2 Einheiten nach links und um 2 Einheiten nach oben verschoben

c) *Konzentrische Kreise:*

$$\text{I} \quad x(t) = \cos(t) \quad \text{II} \quad x(t) = 2 \cos(t) \quad \text{III} \quad x(t) = 3 \cos(t)$$

$$y(t) = \sin(t) \quad y(t) = 2 \sin(t) \quad y(t) = 3 \sin(t)$$

$$\text{IV} \quad x(t) = 4 \cos(t) \quad \text{V} \quad x(t) = 5 \cos(t)$$

$$y(t) = 4 \sin(t) \quad y(t) = 5 \sin(t)$$

Vier Kreise (mit Radius $r = 1$):

$$\text{I} \quad x(t) = \cos(t) + 1 \quad \text{II} \quad x(t) = \cos(t) + 1 \quad \text{III} \quad x(t) = \cos(t) - 1$$

$$y(t) = \sin(t) + 1 \quad y(t) = \sin(t) - 1 \quad y(t) = \sin(t) + 1$$

$$\text{IV} \quad x(t) = \cos(t) - 1$$

$$y(t) = \sin(t) - 1$$

Olympische Ringe (5 Kreise mit Radius $r = 2$):

$$\text{I} \quad x(t) = 2 \cos(t) \quad \text{II} \quad x(t) = 2 \cos(t) - 3 \quad \text{III} \quad x(t) = 2 \cos(t) + 3$$

$$y(t) = 2 \sin(t) + 2 \quad y(t) = 2 \sin(t) + 2 \quad y(t) = 2 \sin(t) + 2$$

$$\text{IV} \quad x(t) = 2 \cos(t) - 1,5 \quad \text{V} \quad x(t) = 2 \cos(t) + 1,5$$

$$y(t) = 2 \sin(t) - 1 \quad y(t) = 2 \sin(t) - 1$$

2. a) Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$

b) Vertauschung der Faktoren führt zu anderen Ellipsenformen: flacher, kreisförmiger, ...

c) Es entsteht eine Spirale.

26

3. a) $x(t) = 4 \cos(t)$ b) $x(t) = 2 \cos(t) + 2$ c) $x(t) = 3 \cos(t)$

$$y(t) = 4 \sin(t) \quad y(t) = 2 \sin(t) - 1 \quad y(t) = 3 \sin(t)$$

4. a) Es handelt sich um einen Halbkreis, weil das Ergebnis des Wurzelziehens nur als positive Zahl definiert ist.

Parameterdarstellungen:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 4 \cos(t) \\ y(t) = 4 \sin(t) \end{array} \right\} \text{für } 0 \leq t \leq \pi \quad \text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = 4 \cos\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) \\ y(t) = 4 \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) \end{array} \right\} \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

26

4. b) *Viertelkreis:*
Einschränkung des Definitionsbereiches der Parameterdarstellung des Vollkreises auf $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

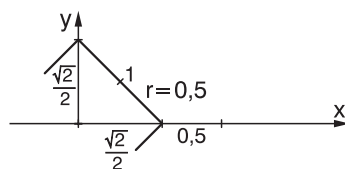
$$\text{Oder: } \left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) \\ y(t) = r \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) \end{array} \right\} \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dreiviertelkreis:

Einschränkung des Definitionsbereiches auf $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$.

$$\text{Oder: } \left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos\left(\frac{3}{4} \cdot t\right) \\ y(t) = r \sin\left(\frac{3}{4} \cdot t\right) \end{array} \right\} \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

5. Der Radius der kleinen Kreise ist 0,5. Die Kreismittelpunkte ergeben sich nach Pythagoras aus der Länge einer Halbdia-gonale im Einheitsquadrat. Der Radius des großen Kreises ist $0,5 \cdot \sqrt{2} + 0,5 = 0,5 \cdot (\sqrt{2} + 1)$



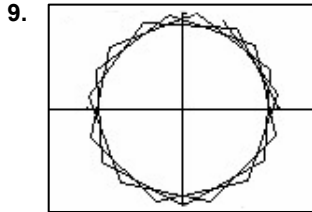
6. a) Der kleine Kreis ist ein Einheitskreis:
- | | | |
|--------------------------|----------------------|--|
| I $x(t) = 2 \cos(0,5 t)$ | II $x(t) = \cos(t)$ | III $x(t) = \frac{2}{\pi} \cdot t - 2$ |
| $y(t) = 2 \sin(0,5 t)$ | $y(t) = \sin(t) + 1$ | $y(t) = 0$ |
- b) Kreis mit $r = 3$, Ellipsen mit den Halbachsen 3 und 2:
- | | | |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| I $x(t) = 3 \cos(t)$ | II $x(t) = 3 \cos(t)$ | III $x(t) = 2 \cos(t)$ |
| $y(t) = 3 \sin(t)$ | $y(t) = 2 \sin(t)$ | $y(t) = 3 \sin(t)$ |
- c) Zum Beispiel: $x(t) = 0,4 \cdot t \cdot \cos(t)$
 $y(t) = 0,2 \cdot t \cdot \sin(t)$ für $0 \leq t \leq 6\pi$

7. a) -
- b) Bei beiden Kreisen starten die x-Werte (Kosinusfunktion) mit dem Maximum, also dem größten x-Wert 3, laufen dann zum kleinsten x-Wert -3 und wieder zurück. Bei den y-Werten (Sinusfunktion) des großen Kreises ist das genau umgekehrt. Dadurch entsteht die Linksdrehung. Beim kleinen Kreis sind die y-Werte wegen des Minuszeichens in der Parametergleichung an der x-Achse gespiegelt. Dadurch entsteht die Rechtsdrehung.
- c) Zum Beispiel durch verändern von t_{step} oder $\cos(a \cdot t)$ anstelle von $\cos(t)$, $\sin(a \cdot t)$ anstelle von $\sin(t)$.
- d) Fehler im Schülerbuch: Die letzte Gleichung lautet richtig $yt2 = 1,5 \cdot \sin\left[2 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right]$.
Es handelt sich um zwei konzentrische Kreise.

26

8. a) Schrittweite $\frac{\pi}{3}$. Im Intervall $[0; 2\pi]$ werden sechs Punkte gezeichnet und miteinander verbunden.
 b) Schrittweite t_{step} z. B. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{5}$ usw.

27



10. a) Es gilt: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$
 Mit dem Ansatz in der Marginalspalte folgt direkt:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{5,0625} + \frac{y^2}{1,4641} = 1 \quad x = \sqrt{2} \cos(t) \quad x = 3 \cos(t) \quad x = a \cos(t)$$

$$y = 2 \sin(t) \quad y = 2 \sin(t) \quad y = b \sin(t)$$

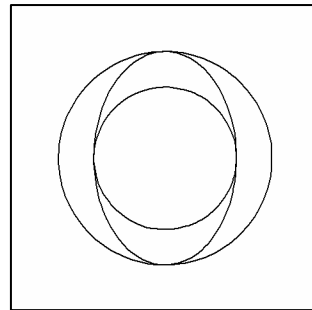
- c) Die Ellipse aus Teilaufgabe a):

$$\text{I } \begin{aligned} x(t) &= 2 \cos(t) \\ y(t) &= 3 \sin(t) \end{aligned}$$

$$\text{II } \begin{aligned} x(t) &= 2 \cos(t) \\ y(t) &= 2 \sin(t) \end{aligned}$$

$$\text{III } \begin{aligned} x(t) &= 3 \cos(t) \\ y(t) &= 3 \sin(t) \end{aligned}$$

Analog die Ellipse aus b).



28

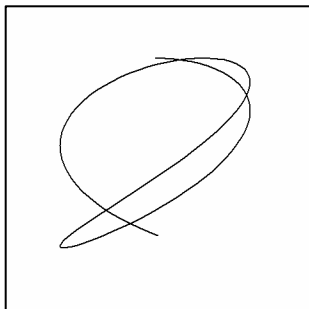
11. Die Länge des Seils beträgt das Doppelte der Halbachse a .
12. a) Als Mittelpunkt einer Ellipse könnte man den Achsenschnittpunkt definieren.
 Als Mittelpunkt einer Spirale könnte man deren Anfangspunkt definieren.
- b) Ellipse: $x(t) = 5 \cos(t) + 3$
 $y(t) = 2 \sin(t) + 4$ für $0 \leq t \leq 2\pi$
 Spirale: $x(t) = 0,4 \cdot t \cdot \cos(t) + 3$
 $y(t) = 0,2 \cdot t \cdot \sin(t) + 4$ für $0 \leq t \leq 6\pi$
- c) Zwei Ellipsen können als „konzentrisch“ bezeichnet werden, wenn sie denselben Mittelpunkt haben und für die Achsenabschnitte a_1 und b_1 gilt: $a_2 = k \cdot a_1$ und $b_2 = k \cdot b_1$.
 Wie konzentrische Kreise haben „konzentrische“ Ellipsen also denselben Mittelpunkt. Die beiden Ellipsen haben allerdings nicht an jeder Stelle den gleichen Abstand voneinander.

29

15. Fortsetzung

Wenn u oder v oder beide Faktoren nicht natürliche Zahlen sind, z. B. $\sqrt{2}$, so ist der Graph nicht symmetrisch. Beispiel:

$$u = 2, v = \sqrt{2}$$



16. a) -
b)



Vergleich: Die Spitzen der Zykloiden werden „abgerundet“.

30

17. a) Die Periode ist unabhängig von r stets 2π . Maximum: $(\pi r \mid 2r)$
b) Der Wälzwinkel t ist in der Skizze der Winkel $\sphericalangle PM'Q$.

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PM}'} = \sin(\pi - t) \Rightarrow \overline{PR} = r \sin(\pi - t) = r \sin(t)$$

$$\Rightarrow x_p = \overline{OQ} - \overline{RP} = rt - r \sin(t)$$

$$\frac{\overline{RM}'}{\overline{PM}'} = \cos(\pi - t) \Rightarrow \overline{RM}' = r \cos(\pi - t) = -r \cos(t)$$

$$\Rightarrow y_p = \overline{QM}' + \overline{M}'R = r - r \cos(t)$$

18. Blüte 1 (B) Blüte 2 (D) Asteroide (A)
Fisch (C) Herz (F) Rollkurve (E), $0 \leq t \leq 6\pi$

1.4 Kurven in Polarkoordinaten

31

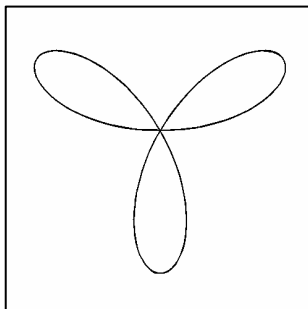
1. a) Man muss den „Nullpunkt“ (hier z. B. die Schutzhütte) festlegen, die Richtung mit dem Winkelmaß 0° (z. B. die Ostrichtung) und die Richtung, in der man den Winkel misst (z. B. gegen den Uhrzeigersinn).
Beispiel: 320 m in Richtung Südwest $\Rightarrow Q(320 \mid 225^\circ)$
b) $P(r \mid \alpha)$ mit $r = \overline{PS} = 100$ m, $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

31

2. a) Die Parameterdarstellung ist einfacher. Die Gleichung $r = 2$ ist weder in x-y-Darstellung noch in Parameterdarstellung definiert.
 b) (1) Kreis um den Ursprung O mit dem Radius 3
 (2) Strahl von O im Winkel 45° zur Bezugsrichtung
 (3) Kreis um $M(0 | 0,5)$ mit dem Radius 0,5
 (4) Kreis um $M(0,5 | 0)$ mit dem Radius 0,5
 (5) Spirale um den Ursprung O

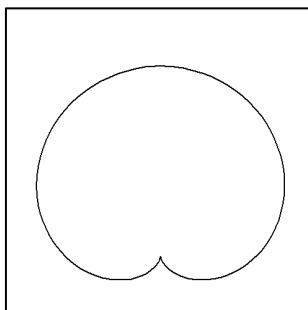
33

3. a) $Q(r | \theta) = Q(5 | 0,927) = Q(5 | 0,295 \pi) = Q(5 | 53,1^\circ)$
 $R(r | \theta) = R(\sqrt{2} | \frac{3\pi}{4}) = R(\sqrt{2} | 135^\circ)$
 $T(r | \theta) = T(\sqrt{13} | 5,3) = T(\sqrt{13} | 1,687\pi) = T(\sqrt{13} | 303,7^\circ)$
 b) $A(x | y) = A(2 | 3,46)$ $B(x | y) = B(-3 | 0)$ $C(x | y) = C(0 | -1)$
4. a) Kreis mit dem Radius $r = 5$ und dem Mittelpunkt $M(0 | 0)$
 b) Kreis mit dem Radius $r = 1,5$ und dem Mittelpunkt $M(0 | 1,5)$
 c)



- d) Parallele zur x-Achse im Abstand 1: $y = 1$
 nicht definiert für $\theta = 0$, $\theta = \pi$ und $\theta = 2\pi$
 e) Parallele zur y-Achse im Abstand 1: $x = 1$
 nicht definiert für $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{3\pi}{2}$

f)



33

5. a) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | multiplizieren mit $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$x^2 + y^2 = y$$

$$x^2 + y^2 - y = 0 \quad | \text{quadratische Ergänzung}$$

$$x^2 + y^2 - y + 0,5^2 = 0 + 0,5^2$$

$$x^2 + (y - 0,5)^2 = 0,25$$

b) zu 4 a) $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ | quadrieren

$$x^2 + y^2 = 25$$

Kreis mit dem Radius $r = 5$ und dem Mittelpunkt $M(0 | 0)$

zu 4 b) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | multiplizieren mit $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$x^2 + y^2 = 3y$$

$$x^2 + y^2 - 3y = 0 \quad | \text{quadratische Ergänzung}$$

$$x^2 + y^2 - 3y + 1,5^2 = 0 + 1,5^2$$

$$x^2 + (y - 1,5)^2 = 1,5^2$$

Kreis mit dem Radius $r = 1,5$ und dem Mittelpunkt $M(0 | 1,5)$

zu 4 c) Von der Kurve ist uns keine x-y-Darstellung bekannt.

zu 4 d) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ | dividieren durch $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$1 = \frac{1}{y}$$

$$y = 1 \quad \text{für } y \neq 0$$

Linie $y = 1$, nicht definiert für $\theta = 0$, $\theta = \pi$ und $\theta = 2\pi$

zu 4 e) Ersetzen $\cos(\theta)$ durch $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$
 | dividieren durch $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$1 = \frac{1}{x}$$

$$x = 1 \quad \text{für } x \neq 0$$

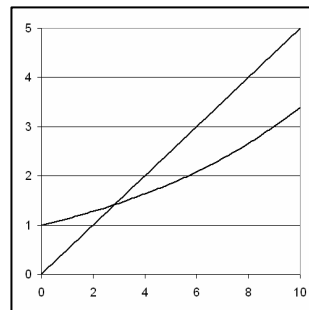
Linie $x = 1$, nicht definiert für $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{3\pi}{2}$

zu 4 f) Von der Kurve ist uns keine x-y-Darstellung bekannt.

33

6. a) Es handelt sich um eine Gerade und um den Graphen einer Exponentialfunktion.

- b) Für $0 \leq \theta \leq 6\pi$
 Man erkennt am Anfangswert der Spirale, welche Gleichung zugrunde liegt. Die Kurve (1) gehört zu $r = 0,5 \cdot \theta$, weil $r = 0$ für $\theta = 0$; die Kurve (2) gehört zu $r = 1,13^\theta$, weil $r = 1$ für $\theta = 0$.



- c) (1) Der Anfangspunkt ist der Koordinatenursprung $(0 | 0)$, weil $r = 0$ für $\theta = 0$. Auf den beiden Achsen sind die Abstände zwischen der Kurve konstant, weil r linear wächst.
 (2) Der Anfangspunkt ist der Punkt $(1 | 0)$, weil $r = 1$ für $\theta = 0$. Auf den beiden Achsen vergrößern sich die Abstände zwischen der Kurve, weil r exponentiell wächst.

7. a) Der Abstand zwischen den Kurven der Spirale ist konstant. Je größer a , desto größer der Abstand.

$$b) r_1 = a \cdot \theta \quad r_2 = a \cdot (\theta + 2\pi) \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\pi a$$

$$c) r = \frac{1}{2\pi} \cdot \theta$$

- d) Mit jeder Windung wächst der Abstand vom Pol um $2\pi a$, mit $a = 0,5$ also um den Wert π . Der Abstand ist 100 nach $\frac{100}{\pi} \approx 32$ Windungen.

8. a) Zum Faktor a siehe Aufgabe 7. Der Summand b bewirkt die Verschiebung des Pols P der Spirale auf der x -Achse um den Wert b : $P(b | 0)$.

$$b) r = a \cdot (\theta + c) = a \cdot \theta + a \cdot c$$

Der Summand c bewirkt die Verschiebung des Pols P auf der x -Achse um den Wert $a \cdot c$: $P(ac | 0)$

- c) Bei $a < 0$ wird der Graph der Spirale an der x -Achse gespiegelt.

$$d) r = a \cdot \theta + b$$

$$\text{Pol der Spirale ist } P(2 | 0) \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Für } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ ist } r = 5. \quad \Rightarrow a \cdot \frac{3\pi}{2} + 2 = 5 \quad \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\pi} \cdot \theta + 2$$

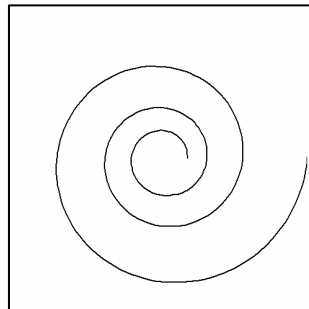
34

9. -

10. Nur wenn die Drehgeschwindigkeit ω und die Geschwindigkeit v der Bleistiftbewegung konstant bleiben, bleibt der Abstand der Spiralkurve konstant.

34

11. a) Im Unterschied zur archimedischen Spirale liegt der Pol der logarithmischen Spirale nicht im Koordinatenursprung. Der Abstand zweier Punkte, deren Polarwinkel sich um 2π unterscheiden ist nicht konstant, sondern wächst exponentiell an.



- b) Der Faktor a bewirkt die Verschiebung des Pols P der Spirale auf der x -Achse um den Wert a : $P(a | 0)$
- $q > 1$ Je größer q ist, desto schneller wächst der Abstand zweier Punkte, deren Polarwinkel sich um 2π unterscheiden.
 - $q = 1$ Der Graph ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = a$.
 - $0 < q < 1$ Vom Pol $P(a | 0)$ windet sich die Spirale linksdrehend in immer engeren Windungen zum Koordinatenursprung hin.

Winkel θ	Radius r	Abstand	Logarithmus	Differenz
0	1,000	0		
2π	3,144	2,144	0,331	0,331
4π	9,886	6,742	0,829	0,498
6π	31,084	21,198	1,326	0,498
8π	97,733	66,650	1,824	0,498
10π	307,293	209,560	2,321	0,498
12π	966,190	658,898	2,819	0,498

Ab dem zweiten Punkt ist die Differenz der Zehnerlogarithmen konstant.

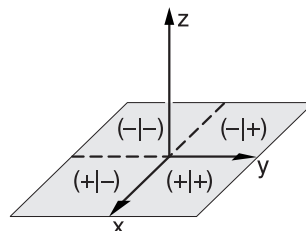
35

13. $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0 \leq \varphi \leq \pi$

Die Formel $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ lässt jeweils zwei Werte für θ zu, die sich um die Periodenlänge π (180°) unterscheiden. Aus dem Vorzeichenpaar von $(x | y)$ lässt sich der jeweils zutreffende Winkel entscheiden.

$(x | y)$

$(+ +)$	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
$(- +)$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
$(- -)$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
$(+ -)$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$



35

13. a) $A(\sqrt{3} \mid 0,785 \mid 0,955) = A(\sqrt{3} \mid 45^\circ \mid 54,74^\circ)$
 $B(\sqrt{26} \mid 1,893 \mid 0,669) = B(\sqrt{26} \mid 108,43^\circ \mid 38,33^\circ)$
 $C(\sqrt{50} \mid 0,927 \mid 2,356) = C(\sqrt{50} \mid 53,13^\circ \mid 135^\circ)$
 $D(\sqrt{3} \mid 3,927 \mid 2,186) = D(\sqrt{3} \mid 225^\circ \mid 125,26^\circ)$
 b) Fehler im Schülerband; die korrekten Koordinaten der Punkte:

$$B\left(5 \mid \frac{3\pi}{2} \mid \frac{3\pi}{4}\right), C\left(5 \mid \frac{5\pi}{3} \mid \frac{\pi}{2}\right), D(2 \mid 5,28 \mid 1)$$

Lösungen:

$$A(0,75 \mid 0,433 \mid 0,5); \quad B(0 \mid -3,535 \mid -3,535);$$

$$C(2,5 \mid -4,33 \mid 0); \quad D(0,905 \mid -1,419 \mid 1,08)$$

14. Fehler im Schülerband; richtig ist: ..., der Winkel φ Werte zwischen 0 und π annimmt.
 Der Winkel θ wird vom positiven Strahl der x-Achse beginnend linksdrehend gemessen. Für Punkte auf der x-Achse ist $\theta = 0$ bzw. nach einer Voldrehung $\theta = 2\pi$.
 Alternativ dazu misst man linksdrehend $0 \leq \theta \leq \pi$ bzw. rechtsdrehend $0 \leq \theta \leq -\pi$.
 Der Winkel φ wird von der positiven z-Achse zu \overline{OP} rechtsdrehend gemessen. Für Punkte oberhalb der x-y-Ebene ($z > 0$) liegt φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$,
 für Punkte unterhalb der x-y-Ebene ($z < 0$) liegt φ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π .
15. R ist die Raumdiagonale im Quader, der durch die Längen x, y und z entsteht (siehe Abbildung zum Beispiel C im Schülerband).
 r ist die Diagonale des Rechtecks in der x-y-Ebene; es ist $r = R \sin \varphi$.
 In der x-y-Ebene liegt der Winkel θ ; der Skizze im Schülerband entnimmt man:

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

In einer zur x-y-Ebene senkrechten Ebene liegt der Winkel φ :

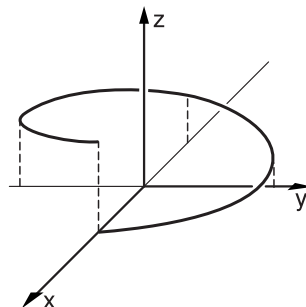
$$\frac{z}{R} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{R}\right)$$

Der Skizze im Schülerband kann man direkt entnehmen: $z = R \cos \varphi$

$$\text{Ferner:} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \quad x = R \sin \varphi \cdot \cos \theta \quad y = R \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

16. a) Kugel um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = 4$.
 b) Die Parametrgleichungen geben eine „Spirale“ im Raum vor.



36

17. a) Die Positionsbestimmung auf der Erdoberfläche erfolgt durch den Abstand vom Erdmittelpunkt, der als konstant angenommen werden kann (siehe Seite 71 im Schülerband) sowie einem Winkel in der Äquatorebene (x-y-Ebene) und einem weiteren Winkel zur Erdpolarachse. Es handelt sich also um die eindeutige Festlegung eines Punktes durch Polarkoordinaten.
- b) Frankfurt am Main 8,7° östliche Länge, 50,1° nördliche Breite
 Polarkoordinaten (6370 | 8,7° | 39,9°)
 New York 74° westliche Länge, 41° nördliche Breite
 Polarkoordinaten (6370 | -74° | 49°)
 Los Angeles 118° westliche Länge, 34° nördliche Breite
 Polarkoordinaten (6370 | -118° | 56°)
18. a) Die Schnur ist längs des Breitengrades straff gespannt. Durch die Verschiebung, z. B. nach oben, ist sie nicht mehr straff gespannt; also kann man die Schnur wieder straffer ziehen. Das zeigt, dass die erste Verbindung der Punkte nicht die kürzeste war.
- b) Der Vollkreis entspricht in der Länge einem Längenkreis oder dem Äquator.
- c) Lissabon 10° westliche Länge, 39° nördliche Breite: (6370 | -10° | 51°)
 Kansas 95° westliche Länge, 39° nördliche Breite: (6370 | -95° | 51°)
 Streckenlänge entlang des 39. Breitenkreises: etwa 7300 km
 Länge der kürzesten Strecke: etwa 7000 km
 Die Differenz zwischen den Strecken beträgt etwa 300 km.
- d) Kürzeste Strecke Frankfurt – Los Angeles: etwa 9300 km

37

19. a) $r = 6367 \cdot \sin(51^\circ)$ Streckenlänge $b = 2\pi r \cdot \frac{85^\circ}{360^\circ} \approx 7340,6$ km
- b) (1) Lissabon (6367 | -10° | 51°)
 Im Bogenmaß: (6367 | -0,1745 | 0,8901)
 Kansas (6367 | -95° | 51°)
 Im Bogenmaß: (6367 | -1,6581 | 0,8901)
 In kartesischen Koordinaten: Lissabon (4872,9 | -859,1 | 4007,0)
 Kansas (-431,4 | -4929,2 | 4007,0)
- Länge des Tunnels: $T = \sqrt{5304,3^2 + 4070,1^2 + 0^2} \approx 6685,9$ km
- (2) $\frac{T}{2r} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 0,525 \approx \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \alpha \approx 63,34^\circ$
- kürzeste Verbindung: $2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \approx 7038,7$ km

20. -